

Mirosława S i t e k (Poznań)

TESTY PORÓWNAŃ WIELOKROTNYCH

1. Wstęp

Przypuśćmy, że obserwowane są zmienne losowe X_1, \dots, X_k o rozkładzie normalnym reprezentujące populacje π_1, \dots, π_k . Na podstawie uzyskanych obserwacji sprawdzamy hipotezę o równości średnich

$$(1) \quad H : \mu_1 = \dots = \mu_k.$$

Jeśli hipoteza (1) zostaje odrzucona, to mogą powstać pytania takiego rodzaju:

Które z k średnich różnią się między sobą, a które są równe?

Czy można wybrać najlepszą populację lub podzbiór zawierający najlepszą populację? Przez najlepszą populację będziemy rozumieć populację z największą lub najmniejszą wartością średnią. Może nas również interesować wyodrębnienie najgorszych populacji tzn. o najmniejszych lub największych średnich.

Często chcemy zbudować przedziały ufności dla poszczególnych średnich lub ich kontrastów. Farmakolog może być zaś zainteresowany porównaniem kilku środków leczniczych ze standardowym lub kontrolnym.

Odpowiedzi na te pytania znajdujemy stosując tzw. metody porównań wielokrotnych.

Założmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k są skorelowane z korelacjami ρ_{ij} i wariancjami σ_1^2 ($i, j = 1, \dots, k$). Parametry σ_1^2, ρ_{ij} są nieznanne. Przy tym ogólnym założeniu można stosować test Scheffego i t - Bonferroniego.

Jeśli zmienne losowe X_1, \dots, X_k są niezależne lub jednako-

wo skorelowane z tą samą wariancją σ^2 , to wtedy można stosować zasadę R i testy oparte na studentyzowanym rozstępie.

Przypuśćmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k mają wariancje $d_1 \sigma^2, \dots, d_k \sigma^2$, gdzie stałe d_1, \dots, d_k są znane, a σ^2 jest nieznanne. Wtedy można stosować studentyzowany maksymalny moduł.

Dokładne omówienie wyżej wymienionych testów znajduje się w § 3 - § 8.

2. Prawdopodobieństwo błędu

Przypuśćmy, że dane są zmienne losowe X_1, \dots, X_k ze średnimi μ_1, \dots, μ_k . O średnich μ_1, \dots, μ_k możemy wysuwać różne przypuszczenia. Na przykład, że

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ \text{lub } \mu_2 &= \mu_3, \\ \text{lub } \mu_4 &= \mu_5 = \mu_6 \quad \text{itp.} \end{aligned}$$

Każde takie przypuszczenie nazwijmy stwierdzeniem i oznaczmy przez S_f . Niech $F = \{S_f\}$ oznacza rodzinę stwierdzeń, a $N(F)$ liczbę stwierdzeń w rodzinie. Na przykład jeśli $F = \{S_1, S_2\}$, to $N(F) = 2$. Stwierdzenia $S_f \in F$ mogą być niezależne lub zależne jedno od drugiego.

Definicja 1. Błędem dla rodziny F nazywamy iloraz niepoprawnych stwierdzeń do wszystkich stwierdzeń, czyli

$$E_r(F) = \frac{N_w(F)}{N(F)},$$

gdzie $N_w(F)$ jest liczbą niepoprawnych stwierdzeń w rodzinie F .

Definicja 2. Prawdopodobieństwem błędu dla rodziny F nazywamy prawdopodobieństwo co najmniej jednego niepoprawnego stwierdzenia, czyli

$$P(F) = P\left\{\frac{N_w(F)}{N(F)} > 0\right\} = P\{N_w(F) > 0\}.$$

Często $P(F)$ jest równe α , jeśli α jest poziomem istotności lub $1 - \alpha$ jest poziomem ufności.

Niech

$$I(S_f) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } S_f \text{ jest niepoprawne} \\ 0 & \text{jeśli } S_f \text{ jest poprawne.} \end{cases}$$

Wtedy prawdopodobieństwo błędu można napisać w postaci (por. [11])

$$\begin{aligned}
 P(F) &= P\left\{\bigcup_f \left[I(S_f) = 1\right]\right\} = \\
 (2) \quad &= \sum_f P\left\{I(S_f) = 1\right\} - \sum_{f_1 < f_2} P\left\{I(S_{f_1}) I(S_{f_2}) = 1\right\} + \\
 &\quad \dots + (-1)^{N(F)-1} P\left\{I(S_1) \dots I(S_{N(F)}) = 1\right\}.
 \end{aligned}$$

Jeśli stwierdzenia są niezależne, to

$$P(F) = \sum_f P\left\{I(S_f) = 1\right\}$$

oraz

$$(3) \quad 1 - P(F) = \prod_1^{N(F)} (1 - P\{I(S_f) = 1\}).$$

Dla stwierdzeń zależnych można korzystać z nierówności Bonferro-niego. Zachodzi nierówność

$$(4) \quad 1 - P(F) = P\left\{\bigcap_f \left[I(S_f) = 0\right]\right\} \geq 1 - \sum_f P\left\{I(S_f) = 1\right\}.$$

Definicja 3. Oczekiwanym błędem rodziny F nazywamy wyrażenie

$$(5) \quad E(F) = E\left\{N_w(F)/N(F)\right\} = \left[\sum_1^{N(F)} P\left\{I(S_f) = 1\right\}\right]/N(F).$$

Pomiędzy prawdopodobieństwem błędu a oczekiwanym błędem zachodzi następująca nierówność (patrz [11])

$$E(F) \leq P(F) \leq N(F) \cdot E(F).$$

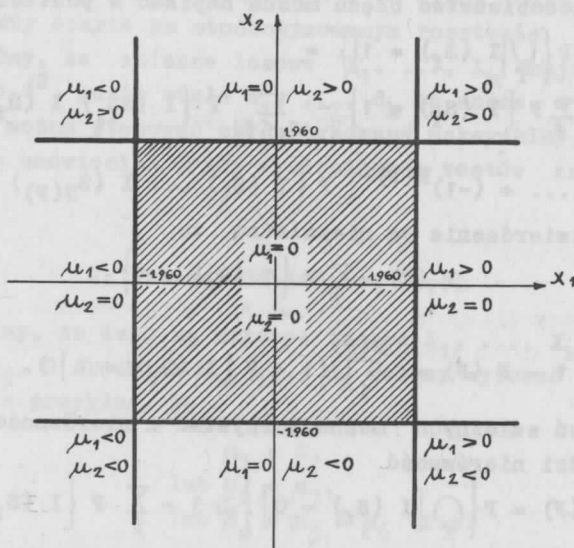
W dalszej części tego paragrafu rozpatrzmy prawdopodobieństwo błędu $P(F)$ dla testów podanych w paragrafach od 3 do 8. Dla uproszczenia, przypuśćmy, że mamy dwie niezależne zmienne losowe X_1, X_2 o rozkładzie normalnym ze średnimi odpowiednio μ_1, μ_2 i wariancją 1. Rodzina stwierdzeń F składa się z dwóch stwierdzeń $\mu_1 = 0$ i $\mu_2 = 0$. Mamy tu więc $N(F) = 2$. Możemy testować hipotezę

$$(6) \quad H : \mu_1 = 0, \mu_2 = 0$$

lub dwie hipotezy oddzielnie

$$(7) \quad H_1 : \mu_1 = 0, \quad H_2 : \mu_2 = 0.$$

Dla testowania hipotezy (6) można zastosować statystykę o rozkładzie normalnym z poziomem istotności α dla pojedynczego stwierdzenia, czyli $\alpha = P\{I(S_f) = 1\}$, $f = 1, 2$. Obszar przyjęcia dla tej hipotezy powstanie z oddzielnego testowania hipotez (7) i będzie kwadratem o boku $2u_{\alpha/2}$. Wartość $u_{\alpha/2}$ jest górnym $\alpha/2$ procentowym punktem rozkładu normalnego, inaczej wartością krytyczną



Rys. 1.

testu dwustronnego na poziomie α . Dla $\alpha = 0,05$ mamy $u_{\alpha/2} = 1,960$. Obszar przyjęcia hipotezy (6) jest przedstawiony na rysunku 1, zaznaczone są również obszary odrzucenia ośmiu możliwych alternatyw. Znajdźmy prawdopodobieństwo błędu dla rodziny F. Oznaczmy przez

$$\alpha_f = P \{ I(S_f) = 1 \}, \quad f = 1, 2.$$

Wtedy z wzoru (3)

$$P(F) = 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2).$$

Jeśli obierzemy $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 0,05$, to

$$P(F) = 1 - (0,95)^2 = 0,0975.$$

Widzimy, że prawdopodobieństwo podjęcia co najmniej jednej błędnej decyzji jest równe prawie 0,1. Oczywiście przy większej ilości zmiennych losowych, a stąd większej liczbie stwierdzeń, prawdopodobieństwo błędu będzie jeszcze większe.

Oczekiwany błąd dla rodziny F otrzymamy z wzoru (5):

$$E(F) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \alpha = 0,05.$$

W wielu sytuacjach prawdopodobieństwo błędu równe 0,1 może być zbyt duże. Tak dużego błędu unikają test Tukeya (§ 5.1), stu-

dentyzowany maksymalny moduł (§ 7) i zasada R (§ 6). Te trzy testy oparte są na statystyce $\max\{|X_1|, |X_2|\}$ i narzucają z góry, aby prawdopodobieństwo błędu dla rodziny F było równe $\tilde{\alpha}$, tzn. aby $P\{\max\{|X_1|, |X_2|\} \leq c\} = 1 - \tilde{\alpha}$. Z wzoru (3) przy założeniu, że $P\{I(S_1) = 1\} = P\{I(S_2) = 1\} = \alpha$ otrzymamy

$$1 - \tilde{\alpha} = (1 - \alpha)^2$$

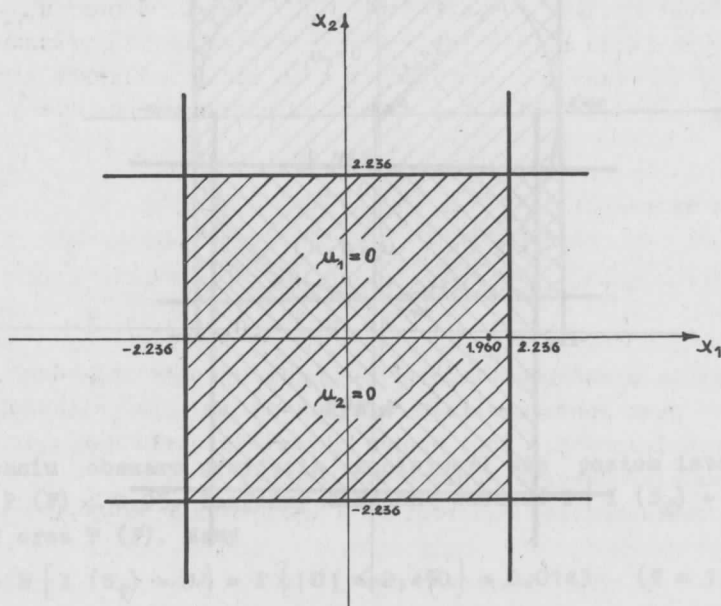
stąd

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - \tilde{\alpha}}.$$

Jeśli obierzemy prawdopodobieństwo błędu dla rodziny F równe 0,05, czyli $\alpha = 0,05$, to prawdopodobieństwo błędu pojedynczego stwierdzenia jest

$$\alpha = 1 - \sqrt{0,95} = 0,0253.$$

Dla poziomu istotności $\alpha = 0,0253$ testu dwustronnego o rozkładzie normalnym odczytujemy wartość krytyczną $u_{\alpha/2} = 2,236$. Obszar przyjęcia dla hipotezy (6) będzie kwadratem o boku $2 \cdot 2,236$ i jest przedstawiony na rysunku 2. Zmniejszając prawdopodobieństwo błędu dla rodziny F zwiększyliśmy obszar przyjęcia i stąd również przedziały ufności dla parametrów.



Rys. 2

Jeśli zmienne losowe są niezależne, to można obliczać prawdopodobieństwo błędu dla rodziny F z wzoru (3). W przypadku zależności zmiennych losowych X_1, X_2 , $P(F)$ należy obliczać z wzoru (2). Bardzo często obliczanie $P\{I(S_{f_1}) \dots I(S_{f_s}) = 1\}$, gdzie wskaźniki f_1, \dots, f_s są elementami zbioru $\{1, 2, \dots, N(F)\}$, sprawia duże trudności. Te trudności można ominąć stosując nierówność Bonferroniego (4).

Test t - Bonferroniego jest oparty na nierówności Bonferroniego (4)

$$1 - P(F) \geq 1 - P\{I(S_1) = 1\} - P\{I(S_2) = 1\}.$$

Jeśli obierzemy $P\{I(S_1) = 1\} = P\{I(S_2) = 1\} = \alpha$, to

$$1 - P(F) \geq 1 - 2\alpha$$

czyli

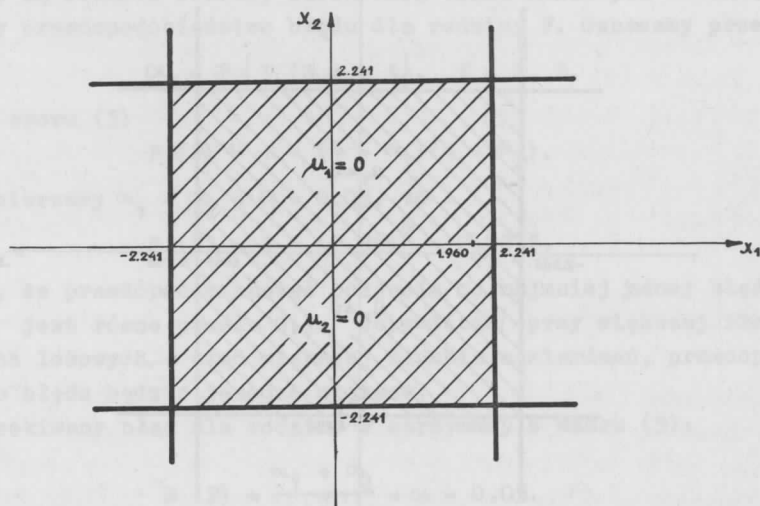
$$P(F) \leq 2\alpha.$$

Jeśli zażądamy, aby prawdopodobieństwo błędu $P(F)$ nie przekroczyło wartości $\tilde{\alpha}$, na przykład równej 0,05, to musi zajść relacja

$$P(F) \leq 2\alpha = \tilde{\alpha}$$

czyli

$$\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025.$$



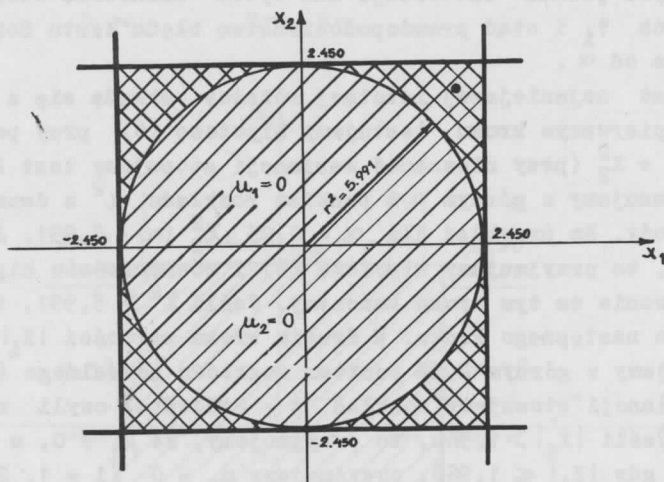
Rys. 3

Wartość krytyczna testu dwustronnego o rozkładzie normalnym dla $\alpha = 0,025$ wynosi $u_{\alpha/2} = 2,241$. Obszar przyjęcia przedstawiony na rysunku 3 jest kwadratem o boku $2 \cdot 2,241$. Otrzymaliśmy jeszcze większy obszar przyjęcia, ponieważ prawdopodobieństwo błędu dla rodziny F nie jest dokładnie równe $0,05$ lecz może być mniejsze od $0,05$.

Znajdźmy prawdopodobieństwo błędu i obszar przyjęcia dla testu Scheffégo. Test Scheffégo używa statystyki $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2$ z dwoma stopniami swobody, która służy do testowania hipotezy (6). Górny 5% punkt rozkładu χ^2 z dwoma stopniami swobody wynosi $5,991$. Obszar przyjęcia dla hipotezy (6) jest zatem kołem

$$X_1^2 + X_2^2 \leq 5,991$$

o promieniu $\sqrt{5,991} = 2,450$. Dla testowania hipotez postaci (7), którymi zajmuje się test Scheffégo, obszar przyjęcia został powiększony do kwadratu o boku $2 \cdot 2,450$ (patrz rysunek 4). Przy po-



Rys. 4

większaniu obszaru przyjęcia zmniejszył się poziom istotności, czyli $P(F) < 0,05$. Znajdźmy dokładną wartość $P\{I(S_f) = 1\}$, $f = 1, 2$ oraz $P(F)$. Mamy

$$\alpha = P\{I(S_f) = 1\} = P\{|U| \leq 2,450\} = 0,0143 \quad (f = 1, 2)$$

oraz

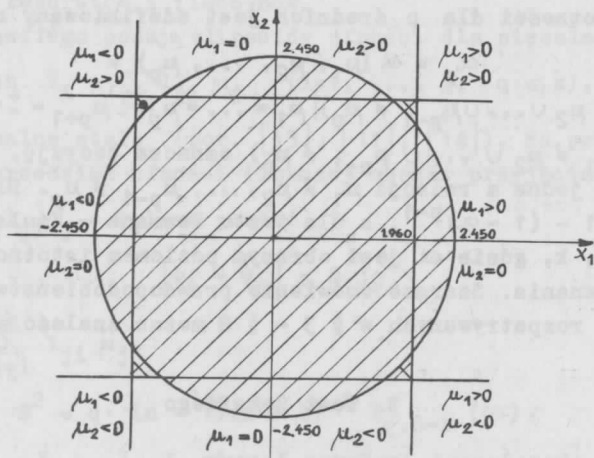
$$P(F) = \alpha_1 + \alpha_2 - P\{I(S_1) I(S_2) = 1\} \leq 2\alpha = 0,0286.$$

Dokładna wartość $P(F)$ wynosi 0,0284. Z rysunku 4 widać, że jeżeli punkt obserwacji wpadnie do obszaru zakratkowanego, to hipoteza (6) zostanie odrzucona, a hipotezy (7) przyjęte. Ta sytuacja bardzo często zdarza się w praktyce.

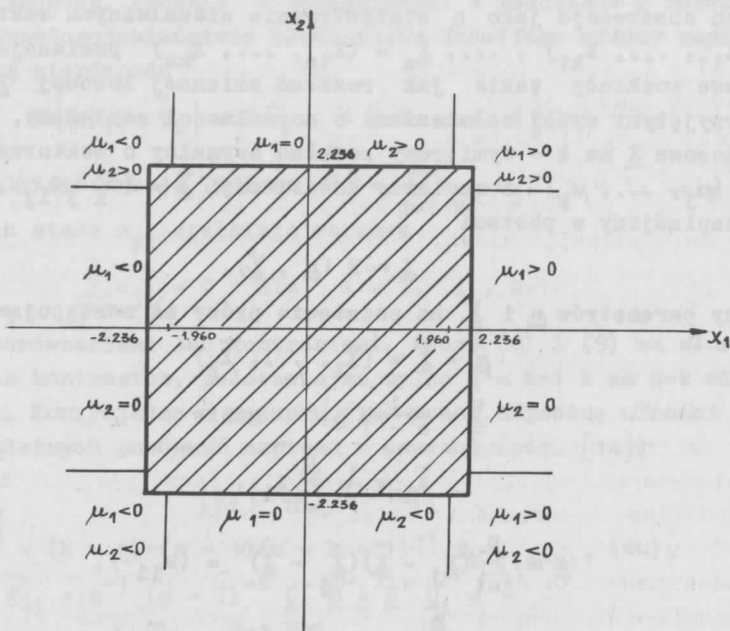
Obszar przyjęcia testu Scheffégo zmienia nieco postać dla testowania niezależnych funkcji liniowych $\psi_1 = \sum_j l_{j1} \mu_j$. Dla hipotez $\psi_1 = 0$ jest on wyznaczony przez pary prostych równoległych stycznych do okręgu $X_1^2 + X_2^2 = 5,991$. Jeżeli tych par prostych jest więcej niż dwie, to obszar przyjęcia będzie mniejszy niż kwadrat na rysunku 4, a $P(F) > 0,0284$ ale nadal mniejsze od 0,05. Jeśli mamy nieskończenie wiele par prostych stycznych do okręgu $X_1^2 + X_2^2 = 5,991$, to obszar wyznaczony przez te proste pokryje się z kołem. Otrzymamy w tym przypadku $P(F) = 0,05$. Reasumując krótko, prawdopodobieństwo błędu $P(F)$ testu Scheffégo dla testowania hipotez $\mu_1 = 0$ ($i = 1, 2$) jest mniejsze od α , ale dla testowania wszystkich możliwych funkcji liniowych $\psi_1 = 0$ jest dokładnie równe α . W praktyce jednak interesuje nas tylko skończona liczba funkcji liniowych ψ_1 i stąd prawdopodobieństwo błędu testu Scheffégo jest mniejsze od α .

Test najmniejszej istotnej różnicy składa się z dwóch kroków. W pierwszym kroku testujemy hipotezę (6) przy pomocy testu $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2$ (przy nieznannej wariancji stosujemy test F). Wartość χ^2 porównujemy z górnym $\alpha\%$ punktem rozkładu χ^2 z dwoma stopniami swobody. Na przykład dla $\alpha = 0,05$ $\chi^2_{\alpha} = 5,991$. Jeśli $\chi^2 \leq 5,991$, to przyjmujemy hipotezę (6) i równocześnie hipotezy (7). Postępowanie na tym kroku kończymy. Jeśli $\chi^2 > 5,991$, to przechodzimy do następnego kroku. W drugim kroku wartości $|X_1|$ ($i = 1, 2$) porównujemy z górnym 2,5% punktem rozkładu normalnego (dla nieznannej wariancji stosujemy rozkład t - Studenta) czyli z wartością 1,960. Jeśli $|X_1| > 1,960$, to przyjmujemy, że $\mu_1 \neq 0$, w przeciwnym wypadku gdy $|X_1| \leq 1,960$, przyjmujemy $\mu_1 = 0$ ($i = 1, 2$). Obszar przyjęcia dla testu najmniejszej istotnej różnicy jest przedstawiony na rysunku 5. Jeśli punkt obserwacji wpadnie do trójkątów zakratkowanych, to hipoteza (6) zostaje odrzucona, natomiast nie mamy podstaw do odrzucenia żadnej z hipotez (7).

Test Duncana i Newmana - Keulsa składa się z kilku kroków. Dokładna procedura postępowania zostanie omówiona w § 5.3 i § 5.2. Interesujące są obszary odrzucenia dla testu Duncana i Newmana - Keulsa, które są przedstawione na rysunku 6.



Rys. 5



Rys. 6

Duncan obiera poziomy istotności w zależności od ilości zmiennych. Poziom istotności dla p średnich jest zdefiniowany następująco:

$$\alpha_p = \alpha (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) = \\ = P\{D(\mu_1 \neq \mu_2 \cup \dots \cup \mu_{p-1} \neq \mu_p) \mid \mu_1 = \dots = \mu_p; \mu_{p+1} = \pm\infty, \dots, \mu_k = \pm\infty\},$$

gdzie $D(\mu_1 \neq \mu_2 \cup \dots \cup \mu_{p-1} \neq \mu_p)$ oznacza decyzję, że zachodzi conajmniej jedna z relacji $\mu_1 \neq \mu_2, \dots, \mu_{p-1} \neq \mu_p$. Dla testu Duncan $\alpha_p = 1 - (1 - \alpha)^{p-1}$, a dla testu Newman - Keulsa $\alpha_p = \alpha$ dla $p = 1, \dots, k$, gdzie α jest obranym poziomem istotności pojedynczego porównania. Szersze omówienie prawdopodobieństwa błędu $P(F)$ dla testów rozpatrywanych w § 3 - § 8 można znaleźć w [11].

3. Test Scheffégo

Niech skorelowane zmienne losowe X_1, \dots, X_k mają rozkład normalny ze średnimi μ_1, \dots, μ_k i wariancjami $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$. Danych jest n niezależnych obserwacji X_{ji} ($j = 1, \dots, k, i = 1, \dots, n$) dla każdej z tych zmiennych losowych. Zmienne te będziemy traktować jako jedną k -wymiarową zmienną losową $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)'$, a ich obserwacje jako n statystycznie niezależnych wektorów $\underline{X}_1 = (X_{11}, \dots, X_{k1})', \dots, \underline{X}_n = (X_{1n}, \dots, X_{kn})'$ posiadających jednakowe rozkłady takie jak rozkład zmiennej losowej \underline{X} . Zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami o normalności zakładamy, że zmienna losowa \underline{X} ma k -wymiarowy rozkład normalny o wektorze średnich $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ i macierzy kowariancji $\underline{\Sigma} = (\sigma_1^2 \sigma_j^2 \rho_{1j})$, co krótko zapisujemy w postaci

$$\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}).$$

Oceny parametrów $\underline{\mu}$ i $\underline{\Sigma}$ na podstawie próby są następujące:

$$\hat{\underline{\mu}} = \bar{\underline{X}} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k)'$$

$$\hat{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{n-1} \underline{A}, \quad \text{gdzie}$$

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij},$$

$$\underline{A} = \sum_{j=1}^n (\underline{X}_j - \bar{\underline{X}})(\underline{X}_j - \bar{\underline{X}})' = (a_{11}'),$$

$$a_{11}' = \sum_{j=1}^n (X_{1j} - \bar{X}_1)(X_{1j} - \bar{X}_1),$$

$$i, i' = 1, \dots, k.$$

Wektor \bar{X} jest wektorem średnich arytmetycznych, a macierz A jest macierzą sum kwadratów i iloczynów.

Test Scheffégo podaje elipsoidy ufności dla niezależnych funkcji liniowych $\psi_i = \sum_{j=1}^k l_{ji} \mu_j$ ($i=1, \dots, q, q \leq k$), gdzie l_{ji} oznaczają dowolne stałe (por. [13], [11], [14]). Na poziomie ufności $1 - \alpha$ przedział ufności (inaczej obszar przyjęcia dla hipotezy $H : \sum_{j=1}^k l_{ji} \mu_j = \psi_i$) ma postać

$$|\psi_i - \hat{\psi}_i| \leq S \hat{\sigma}_{\hat{\psi}_i}$$

gdzie $\hat{\psi}_i = \sum_{j=1}^k l_{ji} \hat{\mu}_j$,

$$(8) \quad S^2 = q \cdot (n-1)(n-k)^{-1} F_{q, n-k}(\alpha),$$

$$(9) \quad \hat{\sigma}_{\hat{\psi}_i}^2 = n^{-1} (n-1)^{-1} \underline{l}_i' A \underline{l}_i$$

$$\underline{l}_i = (l_{1i}, \dots, l_{ki})'$$

Wielkość $F_{q, n-k}(\alpha)$ oznacza górny $\alpha\%$ punkt rozkładu F z q i $n-k$ stopniami swobody. Zgodnie z poczynionymi w rozdziale 2 rozważaniami o prawdopodobieństwie błędu testu Scheffégo możemy napisać następującą nierówność

$$P \left\{ |\psi_i - \hat{\psi}_i| \leq S \hat{\sigma}_{\hat{\psi}_i}, \quad i = 1, \dots, q \right\} \geq 1 - \alpha.$$

Niezależne funkcje liniowe $\psi_i = \sum_{j=1}^k c_{ji} \mu_j$, $i = 1, \dots, k-1$ dla których stałe c_{ji} spełniają warunek

$$(10) \quad \sum_{j=1}^k c_{ji} = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, k-1$$

nazywamy porównaniami lub kontrastami. Wzory (8) i (9) są słuszne również dla kontrastów, podstawiając tylko $q = k-1$ i za $n-k$ wielkość $n-k+1$. Korzystając z warunku (10) można elipsoidę ufności dla $k-1$ niezależnych porównań napisać w postaci (por. [14])

$$|\psi_i - \hat{\psi}_i| \leq S \hat{\sigma}_{\hat{\psi}_i}$$

gdzie $S^2 = (k-1) \cdot (n-1)(n-k+1)^{-1} F_{k-1, n-k+1}(\alpha),$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_i}^2 = n^{-1} (n-1)^{-1} \underline{c}_i' D A D' \underline{c}_i =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{j'=1}^{k-1} c_{ji} c_{j'i} (a_{kk} + a_{jj'} -$$

$$- a_{jk} - a_{j'k}), \quad \underline{c}_i = (c_{1i}, \dots, c_{k-1,i})'$$

Macierz \underline{D} o $k-1$ wierszach i k kolumnach jest następującej postaci

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

W praktyce najczęściej interesują nas porównania. Mogą to być porównania postaci

$$\psi_1 = \mu_4 - \mu_3, \quad \underline{c}_1 = (0, 0, -1)'$$

$$\psi_2 = \frac{\mu_4 + \mu_3}{2} - \mu_2, \quad \underline{c}_2 = (0, -1, 1/2)'$$

$$\psi_3 = \frac{\mu_4 + \mu_3 + \mu_2}{3} - \mu_1, \quad \underline{c}_3 = (-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})'$$

lub porównania wszystkich średnich z jedną średnią

$$\psi_1 = \mu_4 - \mu_1, \quad \underline{c}_1 = (-1, 0, 0)'$$

$$\psi_2 = \mu_4 - \mu_2, \quad \underline{c}_2 = (0, -1, 0)'$$

$$\psi_3 = \mu_4 - \mu_3, \quad \underline{c}_3 = (0, 0, -1)'$$

Dla równoczesnego porównania wszystkich średnich μ_1 z μ_k ($i = 1, \dots, k-1$) używamy kontrastów dających się przedstawić w postaci wektorów $\underline{c}_i = (0, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)'$, gdzie liczba -1 jest na i -tym miejscu. Elipsoida ufności dla kontrastów $\psi_i = \mu_k - \mu_i$ ($i=1, \dots, k-1$) przyjmuje postać

$$(11) \quad |\psi_i - \hat{\psi}_i| \leq \sqrt{(k-1)(n-k+1)^{-1} n^{-1} (a_{i1} - 2a_{ik} + a_{kk})} F_{k-1, n-k+1}(\alpha).$$

Jeśli założymy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k są niezależne z jednakową wariancją σ^2 , to wtedy macierz kowariancji $\underline{\Sigma} = \sigma^2 \underline{I}$, gdzie \underline{I} jest macierzą jednostkową, tzn.

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Oceny $\hat{\sigma}_{\psi}^2$ dla funkcji liniowych upraszczają się. Niech s_{ψ}^2 oznacza ocenę wariancji σ^2 z ν stopniami swobody. Ocena wariancji σ^2 zależy od układu doświadczalnego (patrz [4], [12], [13]). Na przykład dla klasyfikacji pojedynczej

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n (X_{jl} - \bar{X}_j)^2, \quad \nu = k(n-1).$$

Elipsoida ufności dla niezależnych funkcji liniowych przyjmie postać

$$|\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq \sqrt{q \cdot \frac{s_v^2}{n} \cdot \underline{1}_1' \cdot \underline{1}_1 \cdot F_{q, \nu}(\alpha)} = \sqrt{q \frac{s_v^2}{n} F_{q, \nu}(\alpha) \cdot \sum_{j=1}^k \underline{1}_{j1}^2},$$

$$i = 1, \dots, q, \quad \underline{1}_1 = (\underline{1}_{11}, \dots, \underline{1}_{k1})'.$$

Dla $k-1$ niezależnych porównań elipsoida ufności przyjmie postać

$$(12) \quad |\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq \sqrt{(k-1) \frac{s_v^2}{n} F_{k-1, \nu}(\alpha) \sum_{j=1}^k c_{j1}^2}.$$

Dla porównań wszystkich średnich μ_1 z μ_k ($i = 1, \dots, k-1$) otrzymujemy $\sum_{j=1}^k c_{j1}^2 = 2$ i elipsoidę ufności postaci

$$(13) \quad |\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq \sqrt{\frac{(k-1) \cdot s_v^2}{n} \cdot 2 \cdot F_{k-1, \nu}(\alpha)}.$$

Przypuśćmy, że dla niezależnych zmiennych losowych X_1, \dots, X_k mamy niejednakową liczbę obserwacji. Niech dla zmiennej losowej X_j danych będzie n_j obserwacji x_{j1} , $j = 1, \dots, k$, $l = 1, \dots, n_j$. Test Scheffégo możemy zastosować również w tym przypadku zastępując we wzorze (13) wielkość $\frac{2s_v^2}{n}$ przez wyrażenie

$$s_v^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_k} \right),$$

a we wzorze (12) wielkość $(s_v^2/n) \sum_{j=1}^k c_{j1}^2$ przez wyrażenie $s_v^2 \sum_{j=1}^k \frac{c_{j1}^2}{n_j}$.

Za oszacowanie wariancji σ^2 można (dla klasyfikacji pojedynczej) przyjąć wyrażenie

$$s_v^2 = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2, \quad v = \sum_{j=1}^k n_j - k.$$

Przypuśćmy, że macierz kowariancji wektora losowego \underline{X} jest postaci $\underline{\Sigma} = \sigma^2 \underline{\Omega}$, gdzie σ^2 jest nieznanym parametrem, a $\underline{\Omega}$ znaną macierzą symetryczną dodatnio określoną. Oszacowanie parametru σ^2 jest następujące (por. [11])

$$\hat{\sigma}^2 = s_v^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i - \bar{\underline{X}})' \underline{\Omega}^{-1} (\underline{X}_i - \bar{\underline{X}}), \quad v = k(n-1).$$

Elipsoidy ufności dla kontrastów będą postaci

$$|\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq \left[(k-1) F_{k-1, \nu}(\alpha) \frac{s_y^2}{n} \cdot \underline{C}_1 \Omega \underline{C}_1 \right]^{1/2},$$

gdzie

$$\underline{C}_1 = (c_{11}, \dots, c_{k-1,1}, c_{k1})'.$$

3.1. Podsumowanie i uwagi

Test Scheffégo może być stosowany dla ogólnego przypadku, gdy zmienne losowe X_1, \dots, X_k reprezentujące badane populacje $\Pi_1, \dots, \dots, \Pi_k$ są zależne. W tym ogólnym przypadku konieczna jest jednokowa liczba obserwacji. Jeśli macierz kowariancji $\underline{\Sigma}$ jest postaci $\sigma^2 \underline{I}$ lub $\sigma^2 \underline{\Omega}$, wtedy test Scheffégo można również stosować dla niejednakowej liczby obserwacji.

Test Scheffégo ma szerokie zastosowanie. Możemy przy jego pomocy tworzyć przedziały ufności dla średnich, różnic między średnimi dowolnych kontrastów i funkcji liniowych. Porównajmy go z innymi testami. Testy: studentyzowany maksymalny moduł, zasada R, Tukeya i Newman-Keulsa są lepsze dla porównań par średnich niż test Scheffégo. Dla małego q (liczby liniowo niezależnych funkcji liniowych $\psi_1 = \sum_j 1_{j1} \mu_j$) test t -Bonferroniego jest lepszy. Dla rodziny q liniowych kombinacji wartość krytyczna testu t -Bonferroniego wynosi $t_{n-1}(\alpha/2q)$ (lub $t_\nu(\alpha/2q)$), a dla testu Scheffégo wartość krytyczna wynosi $\left[q \cdot F_{q, n-k}(\alpha) \frac{n-1}{n-k} \right]^{1/2}$ (lub $\left[q F_{q, \nu}(\alpha) \right]^{1/2}$). Dla małego q może się zdarzyć, że wartość krytyczna testu t -Bonferroniego będzie mniejsza od wartości krytycznej testu Scheffégo.

3.2. Przykłady

Przykład 1. Przeprowadzono doświadczenie z $k = 10$ odmianami grochu w $n = 21$ miejscowościach rozmieszczonych na terenie kraju. Wyniki średnich plonów w q z ha są zaczerpnięte z pracy [1] i umieszczone poniżej w tabeli 1. Sumy kwadratów i iloczynów odchyleń poprzez miejscowości dla poszczególnych odmian i ich par są umieszczone w tabeli 2. Litery ŻP, KW, WŁ, B, C, ŻB, KP, W, Cz, KM oznaczają odpowiednio odmiany Żółty pomorski, Kujawski Wczesny, Wiktorja Łagiewnicki, Buława, Cezar, KM Żółty Pomorski, Kujawski Późny, Wiktorja PZHR, Czwartkowy, KM 500.

Tabela 1

Średnie plony nasion odmian grochu w q z ha

Miejs- cowości	Odmiany									
	KM	Gz	W	KP	ŻB	C	B	WŁ	KW	ŻP
Przedwojewo	26,3	31,1	29,5	29,7	35,0	30,3	30,7	31,1	33,9	29,0
Tarnawa G.	27,5	20,1	28,9	28,5	29,0	27,9	30,3	28,1	32,3	31,4
Czesławice	21,3	22,3	25,1	24,3	27,0	28,5	27,9	27,7	31,3	23,4
Banaski	18,8	26,1	24,6	26,1	20,9	29,7	18,6	29,8	25,8	28,6
Cieszyce	23,6	13,5	22,0	25,6	23,8	24,3	32,1	23,7	30,5	27,9
Lipie	22,6	18,7	20,4	23,7	24,3	20,8	25,4	25,2	26,1	26,0
Kawenczyn	18,1	22,3	20,4	19,9	22,1	23,1	21,0	23,1	22,3	23,5
Wojciechowice	17,8	17,4	15,4	18,6	23,8	21,2	19,2	21,9	24,2	19,7
Szonowice	18,3	14,3	17,0	21,0	20,2	21,1	25,0	19,0	22,6	19,3
Wronów	10,7	16,0	15,0	17,3	18,1	18,8	20,1	19,8	19,4	22,2
Sielec	18,2	15,1	20,2	16,1	14,9	19,9	20,3	14,3	18,2	19,1
Sbótka	18,0	12,3	15,8	16,9	19,2	16,4	20,5	16,4	20,1	17,7
Radostowo	12,8	16,0	16,2	16,5	14,6	18,9	15,8	20,5	17,3	19,4
Zadąbrowie	10,4	17,4	15,9	14,1	17,0	20,6	14,6	18,9	17,9	20,0
Zabornia	11,8	15,5	13,6	16,5	13,1	15,2	16,7	17,6	13,7	18,1
Głogowa	10,6	12,6	13,5	15,6	11,4	14,1	15,7	17,1	12,1	18,2
Majków	11,5	13,7	12,1	12,5	12,6	16,1	14,3	16,8	15,0	15,7
Dzierzbice	7,1	12,3	12,4	14,3	9,7	13,3	12,2	14,6	10,0	15,4
Fałęcin	7,7	7,6	7,7	11,1	12,7	7,3	13,1	13,7	13,2	15,4
Strugi	7,3	11,7	10,0	9,5	11,8	11,8	8,8	12,3	12,3	11,6
Przelewice	6,7	5,8	7,0	7,6	8,5	6,0	7,9	9,9	8,5	8,9
Średnia \bar{x}_1	15,6	16,3	17,3	18,4	18,6	19,3	19,5	20,1	20,3	20,5

Tabela 2

Sumy kwadratów i iloczynów odchyleń
poprzez miejscowości dla poszczególnych odmian i ich par

	ŻP	KW	WL	B	C	ŻB	KP	W	Cz	KM
ŻP	675,20	793,78	640,18	697,52	707,34	689,57	681,01	674,02	538,57	651,35
KW	793,78	1161,03	817,66	987,33	938,50	1028,19	877,70	879,75	678,76	932,84
WL	640,18	817,66	700,50	652,42	745,14	733,24	684,64	674,87	620,94	633,73
B	697,52	987,33	652,42	971,91	766,28	862,75	784,68	758,98	501,25	846,42
C	707,34	938,50	745,14	766,28	914,40	816,18	762,74	811,19	709,46	747,33
ŻB	689,57	1028,19	733,24	862,75	816,18	967,53	773,50	774,59	650,33	824,35
KP	681,01	877,70	684,64	784,68	762,74	773,50	755,79	731,93	579,44	736,67
W	674,02	879,75	674,87	758,98	811,19	774,59	731,93	792,36	631,75	748,15
Cz	538,57	678,76	620,94	501,25	709,46	650,33	579,44	631,75	683,34	525,98
KM	651,35	932,84	633,73	846,42	747,33	824,35	736,67	748,15	525,98	840,62

Tabela 3

Wartości statystyki Scheffégo

1	ψ_1	$\hat{\psi}_1$	$a_{11} - 2a_{1k} + a_{kk}$	$S \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\psi}_1}$
1	$\mu_{10} - \mu_9$	0,2	248,67	4,99
2	$\mu_{10} - \mu_8$	0,4	95,34	3,09
3	$\mu_{10} - \mu_7$	1,0	252,07	5,02
4	$\mu_{10} - \mu_6$	1,2	174,92	4,18
5	$\mu_{10} - \mu_5$	1,9	263,59	5,13
6	$\mu_{10} - \mu_4$	2,1	68,97	2,62
7	$\mu_{10} - \mu_3$	3,2	119,52	3,46
8	$\mu_{10} - \mu_2$	4,2	281,40	5,30
9	$\mu_{10} - \mu_1$	4,9	213,12	4,62

Rozważmy tylko porównania wszystkich średnich μ_1 z μ_k , $i = 1, \dots, k-1$. Elipsoidalna ufności przyjmuje postać (11). Wartości a_{ik} , a_{11} , a_{kk} są to odpowiednie elementy tabeli 2. Wartości $\hat{\psi}_1 = \bar{x}_k - \bar{x}_1$ oraz

$$S \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\psi}_1} = \sqrt{(k-1)(n-k+1)^{-1} n^{-1} (a_{11} - 2a_{1k} + a_{kk}) F_{k-1, n-k+1}(\alpha)}$$

dla $\alpha = 0,05$ są podane w tabeli 3. Wartość krytyczna F wynosi $F_{9;12}(0,05) = 2,80$. Z tabeli 3 widać, że tylko $\hat{\psi}_9 > S \cdot \hat{\sigma}_{\hat{\psi}_1}$. Zatem przy poziomie istotności $\alpha = 0,05$ populacja odpowiadająca średniej \bar{x}_{10} różni się istotnie od populacji odpowiadającej średniej \bar{x}_1 .

Przykład 2. Przypuśćmy, że interesują nas porównania średnich tylko dla miejscowości Lipie. Doświadczenia dla każdej miejscowości były przeprowadzone metodą losowanych bloków o $r = 6$ blokach czyli powtórzeniach. Średnie z miejscowości Lipie w kolejności rosnącej są umieszczone w tabeli 4. Jest tutaj spełnione założenie o niezależności zmiennych losowych. Średni kwadrat błędów s_v^2 dla tej miejscowości jest obliczony według wzoru

$$s_v^2 = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^r (x_{jl} - \bar{x}_{.1} - \bar{x}_{j.} + \bar{x}_{..})^2,$$

gdzie

$$v = (k-1)(r-1)$$

$$\bar{x}_{.1} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{j1}$$

$$\bar{x}_{j.} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r x_{jl}$$

$$\bar{x}_{..} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \bar{x}_{.1} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{x}_{j.} = \frac{1}{r \cdot k} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^r x_{jl} \quad \text{i wynosi } 3,44 \text{ z } v =$$

$$= (10-1)(6-1) = 45 \text{ stopniami swobody.}$$

Przypuśćmy, że interesują nas porównania

$$\phi_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3} - \frac{\mu_4 + \mu_5 + \mu_6}{3}$$

(14)

$$\phi_2 = \frac{\mu_7 + \mu_8}{2} - \frac{\mu_9 + \mu_{10}}{2}$$

Tabela 4

Średnie plony nasion odmian grochu w q z ha z miejscowości Lipie

Od- mia- na	Cz	W	C	KM	KP	ŻB	WŁ	B	ŻP	KW
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{x}_1	18,7	20,4	20,8	22,6	23,7	24,3	25,2	25,4	26,0	26,1

Wartość $(S \cdot \hat{\sigma}_{\psi_1})^2$ będzie wynosić dla $i = 1, 2$ odpowiednio

$$\frac{9 \cdot 3,44}{6} \sum_{j=1}^{10} c_{j1}^2 F_{9;45}(\alpha) = \frac{9 \cdot 3,44}{6} \cdot \frac{6}{9} \cdot F_{9;45}(\alpha) = 3,44 \cdot F_{9;45}(\alpha)$$

$$\frac{9 \cdot 3,44}{6} \sum_{j=1}^{10} c_{j2}^2 F_{9;45}(\alpha) = \frac{9 \cdot 3,44}{6} \cdot 1 \cdot F_{9;45}(\alpha) = \frac{3}{2} \cdot 3,44 \cdot F_{9;45}(\alpha)$$

Oceny kontrastów są następujące

$$\hat{\psi}_1 = -3,56$$

$$\hat{\psi}_2 = -0,75$$

Przypuśćmy, że interesują nas hipotezy $\psi_i = 0$ ($i = 1, 2$), Dla $\alpha = 0,05$, $F_{9;45}(0,05) = 2,81$ oraz

$$S \cdot \hat{\sigma}_{\psi_1} = \sqrt{9,6664} = 3,11$$

$$S \cdot \hat{\sigma}_{\psi_2} = \sqrt{14,4996} = 3,80.$$

Widzimy, że

$$|\hat{\psi}_1| > 3,11$$

$$|\hat{\psi}_2| < 3,80$$

Przedziały ufności dla porównań ψ_i będą następujące

$$-6,67 = -3,56 - 3,11 \leq \psi_1 \leq -3,56 + 3,11 = -0,45$$

$$-4,55 = -0,75 - 3,80 \leq \psi_2 \leq -0,75 + 3,80 = 3,05.$$

Wyciągamy stąd wniosek, że średni plon odmian Cz, W, C różni się istotnie od średniego plonu odmian KM, KP, ŻB na poziomie istotności 0,05. Natomiast średni plon odmian WŁ, B jest taki sam jak średni plon odmian ŻP, KW na poziomie istotności 0,05.

Przykład 3. Przypuśćmy, że dla miejscowości Lipie interesuje nas wybór najlepszej odmiany lub podzbioru zawierającego najlepszą odmianę. Przez najlepszą odmianę rozumiemy tutaj odmianę, która daje największy średni plon. Musimy w tym przypadku zbadać porównania średnich μ_1 z μ_k ($i = 1, \dots, k-1$).

Tabela 5

Różnice średnich $\bar{x}_{10} - \bar{x}_1$

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{x}_{10} - \bar{x}_1$	7.4	5.7	5.3	3.5	2.4	1.8	0.9	0.7	0.1

Dla danych z tabeli 4 mamy

$$S \cdot \hat{\sigma}_\psi = \sqrt{\frac{2 \cdot s_y^2}{2} (k-1) F_{k-1, \nu}(\alpha)} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,44}{6} \cdot 9 \cdot F_{9,45}(\alpha)} = \\ = \sqrt{10,32 \cdot F_{9,45}(\alpha)} = \sqrt{10,32 \cdot 2,81} = 5,39.$$

Różnice $\bar{x}_{10} - \bar{x}_1$ są umieszczone w tabeli 5 i porównujemy je z wielkością $S \hat{\sigma}_\psi$. Widzimy, że $\bar{x}_{10} - \bar{x}_1 < 5,39$ dla $i = 3, 4, \dots, 9$. Wyciągamy stąd wniosek, że na poziomie istotności 0,05 odmiany C, KM, KP, ŻB, WŁ, B, ŻP dają plony nie różniące się statystycznie istotnie od plonu odmiany KW.

4. Test t - Bonferroniego

Przypuśćmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k mają łączny k-wymiarowy rozkład normalny z wektorem średnich $\underline{\mu}$ i macierzą kowariancji $\underline{\Sigma}$. Przedziały ufności dla rodziny s kombinacji liniowych (niekoniecznie niezależnych) $\psi_1 = \sum_j l_{j1} \mu_j$ statystyki t - Bonferroniego są następujące (por. [11])

$$(15) \quad |\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq t_{n-1}(\alpha/2s) \cdot \left[\frac{1}{n(n-1)} \underline{l}_1' \underline{A} \underline{l}_1 \right]^{1/2}, \\ \underline{l}_1 = (l_{11}, \dots, l_{k1})', \quad i = 1, \dots, s,$$

gdzie $t_{n-1}(\alpha/2s)$ oznacza górny $\alpha/2s\%$ punkt rozkładu t - Studenta z $n-1$ stopniami swobody. Oznacza to, że hipotezę $H: \psi_1 = \sum_j l_{j1} \mu_j = \sum_j l_{j1} \mu_j^0 = \psi_1^0$, $i = 1, 2, \dots, s$ odrzucimy na poziomie istotności

ci α jeśli

$$|\psi_1^0 - \hat{\psi}_1| > t_{n-1} (\alpha/2s) \left[\frac{1}{n(n-1)} \cdot \underline{1}' \underline{A} \underline{1} \right]^{1/2}.$$

Wzór (15) jest również słuszny dla kontrastów. Podobnie jak przy teście Scheffégo możemy znaleźć przedziały ufności dla interesujących nas porównań średnich μ_1 ($i = 1, \dots, k-1$) z jedną średnią μ_k . Dla $\psi_1 = \mu_k - \mu_1$ otrzymujemy elipsoidę ufności postaci

$$|\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq t_{n-1} (\alpha/(2(k-1))) \left[\frac{a_{11} - 2a_{1k} + a_{kk}}{n(n-1)} \right]^{1/2}$$

Przypuśćmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k są niezależne o rozkładzie normalnym ze średnimi odpowiednio μ_1, \dots, μ_k i wspólną wariancją σ^2 . Niech dla każdej zmiennej losowej X_j danych będzie n_j ($j = 1, \dots, k$) obserwacji x_{j1} ($i = 1, \dots, n_j$). Przedział ufności dla s kombinacji liniowych będzie następujący

$$|\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq t_\nu (\alpha/2s) \left[\frac{s_\nu^2}{n_1} \sum_{j=1}^k 1_{j1}^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, \dots, s,$$

gdzie s_ν^2 jest wspólną oceną wariancji σ^2 opartą na ν stopniach swobody.

Niech zmienna losowa $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)'$ ma k -wymiarowy rozkład normalny o wektorze średnich $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ i macierzy kowariancji $\underline{\Sigma} = \sigma^2 \underline{\Omega}$, gdzie $\underline{\Omega} = (\omega_{1j})$ ($i, j = 1, \dots, k$) jest znaną macierzą symetryczną dodatnio określoną, a σ^2 nieznanym parametrem. Przy tych założeniach przedziały ufności dla s kombinacji liniowych są następujące

$$|\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq t_\nu (\alpha/2s) \left[\frac{s_\nu^2}{n} \underline{1}' \underline{\Omega} \underline{1} \right]^{1/2}.$$

4.1. Podsumowanie i uwagi

Porównując test t - Bonferroniégo z innymi testami możemy wysunąć następujące uwagi. Testy oparte na studentyzowanym rozstępie (Tukeya i Newmana - Keulsa) dla porównań wszystkich par średnich są lepsze (w sensie krótszych przedziałów ufności) od testu t - Bonferroniégo. Jeśli interesowałaby nas tylko część porównań par średnich, to może się zdarzyć, że test t - Bonferroniégo da krótsze przedziały ufności niż testy oparte na studentyzowanym rozstępie.

Jak już wspomniano przy teście Scheffégo, dla ogólnych kontrastów i małej liczby funkcji liniowych ψ_1 ($i = 1, \dots, s$, $s \leq q$)

test t - Bonferroniego może się okazać lepszy od testu Scheffégo. Porównując odpowiednie wartości krytyczne testu t - Bonferroniego ($t_{n-1}(\alpha/2s)$ lub $t_{\nu}(\alpha/2s)$) z wartością krytyczną testu Scheffégo ($[q \cdot F_{q, n-k}(\alpha) \frac{n-1}{n-k}]^{1/2}$ lub $[q \cdot F_{q, \nu}(\alpha)]^{1/2}$, a dla porównań $[(k-1) F_{k-1, n-k+1}(\alpha) \frac{n-1}{n-k+1}]^{1/2}$ lub $[(k-1) F_{k-1, \nu}(\alpha)]^{1/2}$) możemy stwierdzić w konkretnej sytuacji, który test jest lepszy. Podobnie może się zdarzyć, że przedziały ufności dla poszczególnych średnich testu t - Bonferroniego będą krótsze niż testu Scheffégo.

Wartości krytyczne $t_{\nu}(\alpha/2s)$ są górnymi $\alpha/2s$ % punktami rozkładu t - Studenta. Na końcu pracy podane zostały wartości krytyczne statystyki t - Bonferroniego $t_{\nu}(\alpha/2s)$ dla $\alpha = 0,05$ i $\alpha = 0,01$, $s = 2/1/10, 15/5/50$, $\nu = 5, 7, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty$. Tablice te są zaczerpnięte z [11]. Test t - Bonferroniego w swej konstrukcji korzysta z nierówności Bonferroniego, dlatego jego poziom istotności jest mniejszy od α . Zachodzi zatem nierówność

$$P\left\{|\psi_1 - \hat{\psi}_1| \leq t_{n-1}(\alpha/2s) \left[\frac{1}{n(n-1)} \frac{1}{s} \Delta \frac{1}{s} \right]^{1/2}, i = 1, \dots, s\right\} \geq 1 - \alpha.$$

4.2. Przykład

Dla danych z tabeli 4 znajdziemy przedział ufności dla kontrastów (14). Wartość krytyczna $t_{\nu}(\alpha/2s) = 2,32$, dla $\alpha = 0,05$, $\nu = 45$, $s = 2$. Przedziały ufności dla kontrastów ψ_1, ψ_2 wynoszą odpowiednio

$$|\psi_1 + 3,56| \leq 2,32 \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{9} \cdot 3,44 \right]^{1/2} = 1,43$$

$$|\psi_2 + 0,75| \leq 2,32 \left[\frac{1}{6} \cdot 3,44 \right]^{1/2} = 1,76.$$

Porównując odpowiednie wartości krytyczne testu Bonferroniego i testu Scheffégo widzimy, że

$$t_{45}(\alpha/4) = 2,32 < [(k-1) F_{k-1; 45}(\alpha)]^{1/2} = [9 \cdot 2,81]^{1/2} = 5,02,$$

a stąd

$$1,43 < 3,11 \quad \text{i} \quad 1,76 < 3,80.$$

Dla interesujących nas dwóch kontrastów otrzymaliśmy krótsze przedziały ufności niż dla testu Scheffégo. Jeśli interesowałyby nas wszystkie $k-1 = 9$ porównań, to otrzymalibyśmy $t_{45}(\alpha/(2 \cdot 9)) = 2,91$ dla $\alpha = 0,05$, które nadal jest mniejsze od 5,02.

5. Testy oparte na studentyzowanym rozstępie

Najczęściej stosowane testy porównań wielokrotnych oparte na studentyzowanym rozstępie, to testy Tukeya i Newmana - Keulsa oraz Duncana. Testy Newmana - Keulsa i Duncana postępują stopniowo stosując różne wartości krytyczne.

Założmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k są niezależne o rozkładzie normalnym ze średnimi μ_1, \dots, μ_k i jednakową wariancją σ^2 . Niech danych będzie n obserwacji dla każdej zmiennej losowej X_i ($i = 1, \dots, k$). Przy tych założeniach statystyka studentyzowanego rozstępu dla testowania hipotezy $H_k: \mu_1 = \dots = \mu_k$ ma postać

$$(16) \quad R_k = \max_{1 \leq i, j \leq k} \left\{ |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \sqrt{n/s_v} \right\}$$

a dla dowolnej hipotezy o równości k_1 średnich $H_{k_1}: \mu_{1_1} = \dots = \mu_{k_1}$ ma postać

$$(17) \quad R_{k_1} = \max_{1 \leq l, m \leq k_1} \left\{ |\bar{x}_{l_1} - \bar{x}_{m_1}| \sqrt{n/s_v} \right\}.$$

5.1. Test Tukeya.

Dla testu Tukeya wartości statystyki studentyzowanego rozstępu zarówno dla hipotezy H_k jak i H_{k_1} porównujemy z tą samą wartością krytyczną $q_{k,v}(\alpha)$. Wartości krytyczne $q_{k,v}(\alpha)$ dla danych k, v i α są stabilizowane w wielu podręcznikach statystycznych, np. [11], [12], [13]. Hipotezę H_k lub H_{k_1} odrzucimy na poziomie istotności α , jeśli $R_k > q_{k,v}(\alpha)$ lub $R_{k_1} > q_{k,v}(\alpha)$. Przedziały ufności dla różnic średnich będą następujące:

$$|(\mu_i - \mu_j) - (\bar{x}_i - \bar{x}_j)| \leq q_{k,v}(\alpha) \cdot s_v / \sqrt{n} \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Test Tukeya można również stosować do tworzenia przedziałów ufności dla kontrastów $\psi_i = \sum_{j=1}^k c_{ji} u_j$, $i = 1, \dots, k-1$. Przedział ufności będzie następującej postaci

$$|\psi_i - \hat{\psi}_i| \leq q_{k,v}(\alpha) \frac{s_v}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^k \frac{|c_{ji}|}{2}.$$

Przypuśćmy, że dla zmiennych losowych X_1, \dots, X_k łączna macierz kowariancji $\underline{\Sigma} = \sigma^2 \underline{\Omega}$, gdzie

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & \varrho & \dots & \varrho \\ \varrho & 1 & \dots & \varrho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varrho & \varrho & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Warunek $-1/(k-1) < \varrho < 1$ jest konieczny i dostateczny na to by macierz $\underline{\Omega}$ była dodatnio określona. Przedziały ufności dla różnic średnich będą następujące

$$(18) \quad |(\mu_1 - \mu_j) - (\bar{x}_1 - \bar{x}_j)| \leq q_{k,\nu}(\alpha) s_{\nu} \sqrt{1-\varrho}/\sqrt{n},$$

gdzie

$$s_{\nu}^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})' \underline{\Omega}^{-1} (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}}), \quad \nu = k(n-1).$$

Trudno jednak znaleźć przykład na zastosowanie przedziałów ufności (18) dla $\varrho \neq 0$.

Przypuśćmy, że interesują nas porównania średnich μ_1 z μ_k ($i = 1, \dots, k-1$). Hipotezę o równości średnich $H_1: \mu_k = \mu_1$ ($i = 1, \dots, k-1$) odrzucimy, jeśli

$$|\bar{x}_k - \bar{x}_1| > q_{k,\nu}(\alpha) s_{\nu} / \sqrt{n}.$$

5.2. Test Newmana - Keulsa.

Test Newmana - Keulsa porównuje wartości statystyki studentyzowanego rozstępu R_k , określonej dla hipotezy $H_k: \mu_1 = \dots = \mu_k$ wzorem (16), z wartością krytyczną $q_{k,\nu}(\alpha)$, a dla hipotezy $H_{k_1}: \mu_1 = \dots = \mu_{k_1}$ porównuje wartości statystyki R_{k_1} , określonej wzorem (17) z wartością krytyczną $q_{k_1,\nu}(\alpha)$.

Przypuśćmy, że obserwowane średnie są tak ponumerowane, że spełniają relacje

$$(19) \quad \bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_{k-1} \leq \bar{x}_k.$$

Jeśli interesuje nas porównanie średnich \bar{x}_1 z \bar{x}_k , to wartości statystyki:

$$R_k = (\bar{x}_k - \bar{x}_1) \sqrt{n}/s_{\nu} \quad \text{porównujemy z } q_{k,\nu}(\alpha)$$

$$R_{k-1} = (\bar{x}_k - \bar{x}_2) \sqrt{n}/s_{\nu} \quad \text{porównujemy z } q_{k-1,\nu}(\alpha)$$

⋮

$$R_2 = (\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}) \sqrt{n}/s_{\nu} \quad \text{porównujemy z } q_{2,\nu}(\alpha).$$

Wartości $q_{k,\nu}(\alpha), \dots, q_{2,\nu}(\alpha)$ odczytujemy dla danego α, ν sto-
pni swobody dla błędu i ilości zmiennych odpowiednio $k, \dots, 2$.

5.3. Test Duncana

Podobnie jak test Newmana - Keulsa postępuje test Duncana. Różnice między tymi testami polegają na innym określaniu poziomu istotności. Oznaczmy przez α_{k_1} poziom istotności dla hipotezy H_{k_1} : $\mu_{1_1} = \dots = \mu_{1_{k_1}}$, $k_1 = 2, 3, \dots, k$. Dla testu Newmana-Keulsa $\alpha_{k_1} = \alpha$ dla każdego k_1 . Dla testu Duncana $\alpha_{k_1} = 1 - (1 - \alpha)^{k_1 - 1}$. Zatem dla testu Duncana wartości statystyki (17) porównujemy z wartością krytyczną studentyzowanego rozstępu $q_{k_1,\nu}(\alpha_{k_1})$. Wartości krytyczne $q_{k_1,\nu}(\alpha_{k_1})$ w wielu podręcznikach statystycznych są oznaczane przez D_α i można je znaleźć w [11], [12], [13], [14], [4].

5.4. Podsumowanie i uwagi

Testy oparte na studentyzowanym rozstępie podane zostały tylko dla przypadku jednakowej liczby obserwacji. Kramer w pracach [8] i [9] podał test Duncana dla niejednakowej liczby obserwacji. Przypuśćmy, że dla każdej zmiennej X_1 mamy n_1 obserwacji ($i = 1, \dots, k$). Niech obserwowane średnie arytmetyczne spełniają nierówność (19). Wtedy hipotezę o równości średnich $\mu_j = \mu_{j+1} = \dots = \mu_1$ przyjmiemy jeśli

$$(20) \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_j \leq \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_j}\right) \cdot \frac{s_v^2}{2} \cdot q_{i-j+1,\nu}(\alpha_{i-j+1})}.$$

Kramer ([9]) uogólnił również test Duncana dla zmiennych losowych skorelowanych, gdy oceny wariancji i kowariancji dla średnich arytmetycznych są postaci $c_{11}s_v^2$ i $c_{ij}s_v^2$, gdzie c_{11}, c_{ij} są znanymi stałymi. Wtedy średnie zaliczymy do grupy jednorodnej (tzn. o jednakowych średnich) jeśli

$$(21) \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_j \leq \sqrt{\frac{(c_{11} - 2c_{1j} + c_{jj}) s_v^2}{2} \cdot q_{i-j+1,\nu}(\alpha_{i-j+1})}.$$

Jeśli liczby obserwacji n_1 lub stałe $c_{11} - 2c_{1j} + c_{jj}$ ($i, j = 1, \dots, k$) różnią się mocno, to test Duncana określony wzorem (20) lub (21) może odrzucić hipotezę o równości średnich, które uprzednio już zaliczył do grupy jednorodnej. Zatem w przypadku niejednakowej

liczby obserwacji należy przyjąć następującą regułę postępowania: nie ma istotnych różnic między średnimi, jeżeli obie średnie znajdują się w grupie średnich jednorodnych.

Powyższe uogólnienie Kramera dotyczy również testu Tukeya i Newmana - Keulsa. Statystyka studentyzowanego rozstępu w przypadku niejednakowej liczby obserwacji przyjmuje postać

$$R_k = \max_{1 \leq i, j \leq k} \left\{ |\bar{x}_i - \bar{x}_j| / \sqrt{\frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} \right\}$$

oraz

$$R_{k_1} = \max_{1 \leq l, m \leq k_1} \left\{ |\bar{x}_{l_1} - \bar{x}_{m_1}| / \sqrt{\frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{n_{l_1}} + \frac{1}{n_{m_1}} \right)} \right\}.$$

Test Tukeya ma zastosowanie do testowania hipotez o równości kilku grup średnich. Na przykład, gdy hipoteza zerowa jest postaci

$$H: \mu_1 = \mu_2, \mu_3 = \mu_4 = \mu_5, \mu_6 = \dots = \mu_k$$

test Tukeya bada, czy części hipotezy H są równocześnie słuszne. Poziom istotności testu Tukeya dla różnych postaci hipotezy H nie przekracza α . Jednak dla poszczególnych części hipotezy H poziom istotności jest znacznie mniejszy od α . Test Tukeya dla kontrastów daje na ogół dłuższe przedziały ufności niż test Scheffégo lub t - Bonferroniego, natomiast krótsze przedziały ufności dla różnic średnich.

Test Newmana - Keulsa dla hipotezy ogólnej $H: \mu_1 = \dots = \mu_k$ jak również dla hipotez

$$H_{k-1}: \mu_k = \dots = \mu_2, \dots, H_2: \mu_k = \mu_{k-1}$$

odnoszących się do części średnich ma poziom istotności równy α . Test Newmana - Keulsa, jak również test Duncana, bada każdą hipotezę o równości pewnej grupy średnich oddzielnie.

Szczegółowe rozważania nad testami Tukeya i Newmana - Keulsa można znaleźć w [5] i [11]. Testy Newmana - Keulsa i Duncana ze względu na niejednoczesne testowanie hipotez o równości średnich nie mogą służyć do tworzenia przedziałów ufności. Przy teście Duncana poziom istotności dla porównania wszystkich średnich jest równy $1 - (1 - \alpha)^{k-1}$ i wzrasta do jeden, gdy k rośnie do nieskończoności. Zatem dla dużej liczby średnich prawdopodobieństwo błędu może być duże. Na przykład przy $\alpha = 0,05$ poziom istotności dla dziesięciu średnich $\alpha_{10} = 0,37$; dla dwudziestu średnich $\alpha_{20} = 0,62$. Możemy więc przy dużej liczbie porównywanych średnich podjąć błędną decyzję.

5.5. Przykłady

Przykład 1. Znajdźmy przy pomocy testu Tukeya przedziały ufności dla kontrastów ψ_1 , ψ_2 danych wzorem (14). Dla danych z tabeli 4 mamy $n=6$, $s_v^2 = 3,44$, $v = 45$, $q_{10,45}(0,05) = 4,705$ oraz

$$q_{k,v}(0,05) \frac{s_v}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^k \frac{|c_{1j}|}{2} = 4,705 \sqrt{\frac{3,44}{6}} \cdot 1 = 3,56$$

$$q_{k,v}(0,05) \frac{s_v}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^k \frac{|c_{1j}|}{2} = 4,705 \cdot \sqrt{\frac{3,44}{6}} \cdot 1 = 3,56$$

Dla kontrastu ψ_1 otrzymaliśmy przedział dłuższy niż dla testu Scheffégo i t - Bonferroniego, a dla ψ_2 przedział krótszy niż dla testu Scheffégo lecz dłuższy niż dla testu t - Bonferroniego. Ponieważ $|\psi_1| \leq 3,56$ dla $i = 1, 2$, więc nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy $H: \psi_1 = 0$ ($i = 1, 2$).

Przykład 2. Dla danych z tabeli 4 porównajmy wszystkie średnie μ_1 z μ_k ($i = 1, \dots, k-1$) przy pomocy testu Tukeya. Wartości statystyki R_1 , $q_{1,v}(\alpha)$ oraz $q_{1,v}(\alpha) \sqrt{\frac{3,44}{6}}$ dla $\alpha = 0,05$, $i = 10, 9, \dots, 2$, $v = 45$ są umieszczone w tabeli 6. Widzimy, że war-

Tabela 6

Wartości statystyki studentyzowanego rozstępu

i	$R_1 = (\bar{x}_{10} - \bar{x}_{10-i+1}) \sqrt{6/3,44}$	$q_{1,45}(0,05)$	$q_{1,45}(0,05) \sqrt{\frac{3,44}{6}}$
10	9,773	4,70	3,56
9	7,527	4,60	3,48
8	7,000	4,50	3,41
7	4,662	4,36	3,30
6	3,169	4,21	3,19
5	2,377	4,02	3,04
4	1,189	3,77	2,85
3	0,924	3,43	2,60
2	0,132	2,85	2,16

tości R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 i $R_7 = (\bar{x}_{10} - \bar{x}_4) \sqrt{6/3,44} = 4,622$ są mniejsze od wartości krytycznej $q_{10,45}(0,05) = 4,70$. Zatem test Tukeya stwierdza, że odmiany KM, KP, ŻB, WŁ, B, ŻP, KW mają jednakowe

średnie. Ponieważ średnie są ponumerowane od wartości najmniejszej do największej, to możemy powiedzieć również, że wymienione odmiany tworzą grupę odmian najlepszych. Możemy przy pomocy testu Tukeya znaleźć wszystkie grupy jednorodne, to znaczy grupy populacji o jednakowych średnich. Otrzymujemy, że $\bar{x}_6 - \bar{x}_3 = 3,5 < 3,56$, $\bar{x}_5 - \bar{x}_2 = 3,3 < 3,56$, $\bar{x}_3 - \bar{x}_1 = 2,1 < 3,56$. Wyniki możemy przedstawić graficznie podkreślając linią ciągłą średnie, dla których różnice $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ są nieistotne ($i > j$, $i = 2, \dots, 10$, $j = 1, \dots, 9$), tzn. podkreślamy odmiany, które mają jednakowe średnie na poziomie istotności 0,05. Okazuje się, że istotne różnice tworzą odmiany

Cz z KM, KP, ŻB, WŁ, B, ŻP, KW
 W z ŻB, WŁ, B, ŻP, KW
 C z WŁ, B, ŻP, KW

Cz W C KM KP ŻB WŁ B ŻP KW

Należy zauważyć, że łączny poziom istotności dla powyższych porównań jest $\alpha = 0,05$.

Przykład 3. Zastosujmy teraz test Newman - Keulsa dla wyodrębnienia grup jednorodnych. Porównując odpowiednie wartości z tabeli 6 widzimy, że $R_2 < q_{2,45}(\alpha)$, $R_3 < q_{3,45}(\alpha)$, $R_4 < q_{4,45}(\alpha)$, $R_5 < q_{5,45}(\alpha)$, $R_6 < q_{6,45}(\alpha)$, tzn. odmiany KP, ŻB, WŁ, B, ŻP, KW są jednakowe na poziomie istotności 0,05. Ponieważ są to największe średnie, więc możemy powiedzieć, że wyżej wymienione odmiany tworzą grupę odmian najlepszych.

Znajdźmy przy pomocy testu Newman - Keulsa pozostałe grupy jednorodne. Widzimy, że $\bar{x}_8 - \bar{x}_4 = 2,8 < 3,04$, $\bar{x}_5 - \bar{x}_3 = 2,5 < 2,60$, $\bar{x}_4 - \bar{x}_2 = 2,2 < 2,60$, $\bar{x}_3 - \bar{x}_1 = 2,1 < 2,60$. Grupy jednorodne są podkreślone linią ciągłą. Przy pomocy testu Newman - Keulsa wybraliśmy każdą grupę oddzielnie na poziomie istotności $\alpha = 0,05$.

Cz W C KM KP ŻB WŁ B ŻP KW

Przykład 4. Dla danych z tabeli 4 zastosujmy test Duncana. Wartości $D_\alpha = q_{1,\nu}(\alpha)$ oraz $D_\alpha \cdot s_{\sqrt{\nu}} = D_\alpha \sqrt{3,44/6} = D_\alpha \cdot 0,757$ dla $\alpha = 0,05$ znajdują się w tabeli 7. Otrzymujemy dla $\alpha = 0,05$, że $\bar{x}_{10} - \bar{x}_5 = 2,4 < 2,434$, $\bar{x}_{10} - \bar{x}_4 = 3,5 > 2,466$, czyli odmiany KP, ŻB, WŁ, B, ŻP, KW mają jednakowe średnie i możemy powiedzieć, że tworzą grupę odmian najlepszych. Następnie otrzymamy $\bar{x}_6 - \bar{x}_4 =$

Tabela 7

Wartości krytyczne testu Duncana

1	$D_{0,05}$	$D_{0,05} \cdot 0,757$
2	2,848	2,156
3	2,996	2,268
4	3,092	2,341
5	3,162	2,394
6	3,215	2,434
7	3,258	2,466
8	3,292	2,492
9	3,321	2,514
10	3,346	2,533

$= 1,7 < 2,268$ a $\bar{x}_6 - \bar{x}_3 = 3,5 > 2,341$, czyli odmiany KM, KP, ŻB tworzą grupę odmian jednorodnych. Z pozostałych różnic $\bar{x}_4 - \bar{x}_3 = 1,8 < 2,156$, $\bar{x}_4 - \bar{x}_2 = 2,2 < 2,68$, ale $\bar{x}_4 - \bar{x}_1 = 3,9 > 2,341$. Odmiany W, C, KM tworzą grupę odmian jednorodnych. Pozostałe różnice średnich są nieistotne, ponieważ $\bar{x}_3 - \bar{x}_2 = 0,4 < 2,156$, $\bar{x}_3 - x_1 = 2,1 < 2,268$. Odmiany Cz, W, C tworzą grupę odmian jednorodnych. Przedstawiamy graficznie otrzymane wyniki podkreślając linią ciągłą grupy jednorodne.

Cz W C KM KP ŻB WŁ B ŻP KW

6. Zasada R

Zasadę R podali Gupta i Sobel ([6], [7]) w przypadku jednokowej liczby obserwacji. Można ją stosować do wyboru najlepszych populacji lub do porównań z jedną populacją, na przykład kontrolną lub standardową. Porównaniem ze standardem zajmował się Dunnett ([2], [3]). W zasadzie R prawdopodobieństwo wyboru podzbioru zawierającego najlepszą populację lub populacje niegorsze od populacji kontrolnej jest równe pewnej z góry ustalonej wartości $P = 1 - \alpha$.

Niech badane populacje reprezentowane będą przez k zmiennych losowych X_1, \dots, X_k nieskorelowanych lub jednakowo skorelowanych o rozkładzie normalnym ze średnimi μ_1, \dots, μ_k i wspólną wariancją σ^2 . Przypuśćmy, że parametry te są nieznanne. Niech danych będą

dzie n obserwacji dla każdej populacji. Niech \bar{x}_i oznacza średnią z próby z i -tej populacji, a \bar{x}_{\max} największą z obserwowanych średnich \bar{x}_i , $i = 1, \dots, k$.

Zasada R brzmi w tym przypadku następująco: wybrać jako najlepsze te populacje, dla których

$$(22) \quad \bar{x}_i \geq \bar{x}_{\max} - t_{k, \nu}(\alpha) s_{\nu} \sqrt{2/n}.$$

Wartość $t_{k, \nu}(\alpha)$ należy odczytać w tablicach wielowymiarowego rozkładu t Studenta dla danego $\alpha = 1 - P$, ν stopni swobody i k lub $p = k - 1$. Wartości krytyczne wielowymiarowego rozkładu t Studenta można znaleźć w [7], [10], [11], [15], są one również umieszczone na końcu pracy.

Przypuśćmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k są niezależne o rozkładzie normalnym z jednakowymi wariancjami. Niech dla każdej zmiennej losowej X_i danych będzie n_i obserwacji. Zasada R w tym przypadku brzmi następująco: wybrać jako najlepsze te populacje, dla których

$$(23) \quad \bar{x}_i \geq \bar{x}_{\max} - t'_{k, \nu}(\alpha) s_{\nu} \sqrt{1/n_i + 1/n},$$

gdzie n jest liczebnością obserwacji zmiennej losowej posiadającej największą średnią \bar{x}_{\max} . Wartość $t'_{k, \nu}(\alpha)$ znajdujemy korzystając z tablic wielowymiarowego rozkładu t Studenta oraz z odpowiednich tablic poprawek. Uzasadnienie nierówności (23) dla przypadku niejednakowej liczby obserwacji znajduje się w [15]. Niech x oznacza poprawkę w procentach umieszczoną w tablicy poprawek (znajdującej się na końcu pracy i w [15]) dla danego ν , k (lub $p = k - 1$) i odpowiedniego $\min n_i/n = 0, 1/4, 1/3$. Wzór na $t'_{k, \nu}(\alpha)$ jest następujący:

$$(24) \quad t'_{k, \nu}(\alpha) = \left[\left(1 - \frac{\min n_i}{n} \right) \cdot \frac{x}{100} + 1 \right] t_{k, \nu}(\alpha).$$

Wyprowadzenie wzoru (24) i konstrukcja tablicy poprawek znajdują się w [15].

Można zauważyć, że jeśli liczba obserwacji jest jednakowa tzn. dla każdego i $n_i = n$, to wzory (22) i (23) pokrywają się, bowiem z (24) $t'_{k, \nu}(\alpha) = t_{k, \nu}(\alpha)$. Obliczmy przykładowo wartość krytyczną $t'_{k, \nu}(\alpha)$. Niech danych będzie $k = 5$ populacji, $\nu = 16$ stopni swobody, oraz $\min n_i/n = 0,27$. Szukamy w tablicy poprawek, że

dla $p = k - 1 = 4$, $\nu = 16$, $\alpha = 0,05$ i $\frac{\min n_i}{n} = \frac{1}{4}$, wartość poprawki $x = 4,6\%$ oraz w tablicach wartości krytycznych wielowymiarowego rozkładu t Studenta $t_{k, \nu}(\alpha) = 2,34$. Szukana wartość będzie

$$t'_{k, \nu} = [0,73 \cdot 0,046 + 1] 2,34 = 2,42.$$

Przypuśćmy, że oprócz zmiennych losowych X_1, \dots, X_k mamy jeszcze zmienną losową X_0 , reprezentującą populację kontrolną lub standardową. W przypadku jednakowej liczby obserwacji zasada R dla porównań z kontrolą brzmi podobnie: wybrać jako co najmniej tak dobre jak kontrola te populacje, dla których

$$(25) \quad \bar{x}_1 \geq \bar{x}_0 - t_{k+1, \nu}(\alpha) \cdot s \sqrt{2/n},$$

gdzie \bar{x}_0 jest średnią z próby populacji kontrolnej.

W przypadku niejednakowej liczby obserwacji nierówność (25) przyjmie postać

$$\bar{x}_1 \geq \bar{x}_0 - t'_{k+1, \nu}(\alpha) \cdot s \sqrt{1/n_0 + 1/n_1},$$

gdzie n_0 jest liczebnością obserwacji populacji kontrolnej.

Podana tu zasada R jest testem jednostronnym. Można ją również stosować jako test dwustronny, wstawiając za $t_{k, \nu}(\alpha)$ dwustronne wartości krytyczne wielowymiarowego rozkładu t Studenta, które znajdują się w [3] i [11].

6.1. Podsumowanie i uwagi

Zasada R ma szczególne zastosowanie do wyboru podzbioru populacji zawierających populację z największą średnią. Jeśli chcemy wybrać populacje z najmniejszą średnią, wtedy wystarczy średnie \bar{x}_1 pomnożyć przez minus jeden i zasadę R stosować bez zmian dla średnich $-\bar{x}_1$. Zasada R jest również jedyną metodą stosowaną do porównań z kontrolą, często spotykaną w literaturze pod nazwą testu Dunnetta.

Zasada R posiada dwie własności monotoniczności i optymalności:

1° Jeśli $\mu_1 \geq \mu_j$, to prawdopodobieństwo zawarcia w podzbiórze populacji z parametrem μ_1 jest nie mniejsze od prawdopodobieństwa zawarcia w podzbiórze populacji z parametrem μ_j .

2° Zasada R wybiera taki podzbiór o wielkości S (nieznanej z góry), dla którego prawdopodobieństwo zawarcia najlepszej populacji jest maksymalne.

Przy pomocy zasady R można tworzyć grupy jednorodnie podobnie jak przy testach Tukeya, Newman - Keulsa i Duncana. Poziom istotności w zasadzie R jest dokładnie równy α .

6.2. Przykłady

Przykład 1. Zastosujmy zasadę R dla danych z tabeli 4. Mamy tutaj $\bar{x}_{\max} = 26,1$, $n = 6$, $s_{\bar{y}}^2 = 3,44$, $v = 45$, $k = 10$. Ponieważ w tablicach wielowymiarowego rozkładu t Studenta nie ma wartości krytycznych dla $v = 45$, przeto potrzebną wartość obliczamy z wzoru na interpolację odwrotną

$$(26) \quad t_{v_1} - t_{v_2} = \frac{1/v_1 - 1/v_2}{1/v_1 - 1/v_3} (t_{v_1} - t_{v_3}).$$

Dla naszego przykładu mamy $v_1 = 40$, $v_2 = 45$, $v_3 = 60$ oraz $\alpha = 0,05$ i $p = k - 1 = 9$, $t_{40} = 2,54$, $t_{60} = 2,50$. Podstawiając odpowiednie wartości do wzoru (26) otrzymamy $t_{45} = 2,53$. Wartość $\bar{x}_{\max} - t_{k,v}(\alpha) s_{\bar{y}} \sqrt{2/n} = 26,1 - 2,53 \cdot \sqrt{3,44 \cdot 2/6} = 23,6$. Nierówność (22) spełniają średnie $\bar{x}_{10}, \dots, \bar{x}_5$. Zatem odmiany KP, ŻB, WŁ, B, ŻP, KW tworzą grupę odmian najlepszych na poziomie istotności 0,05. Znajdźmy następną grupę zawierającą najlepszą odmianę. Następną największą średnią spośród pozostałych czterech średnich jest $\bar{x}_4 = 22,6$. Postępując podobnie dla $p = 4 - 1 = 3$, $\alpha = 0,05$ mamy $t_{40} = 2,13$, $t_{60} = 2,10$ i z wzoru (26) $t_{45} = 2,12$. Wartość $\bar{x}_{\max} - t_{4;45} \cdot s_{\bar{y}} \sqrt{2/n} = 22,6 - 2,12 \cdot \sqrt{3,44 \cdot 2/6} = 22,6 - 2,4 = 20,2$. Nierówność (22) spełniają średnie $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$, czyli odmiany W, C, KM tworzą grupę odmian najlepszych spośród czterech odmian. Możemy to przedstawić graficznie. Każda grupa jednorodna została utworzona na poziomie istotności $\alpha = 0,05$.

Cz
W
C
KM
KP
ŻB
WŁ
B
ŻP
KW

Przykład 2. Przypuśćmy, że odmiana KP jest odmianą kontrolną. Wtedy $\bar{x}_0 = 23,7$, $t_{10;45}(0,05) = 2,53$. Wartość $\bar{x}_0 - t_{10,v}(\alpha) s_{\bar{y}} \sqrt{2/n} = 23,7 - 2,7 = 21,0$. Nierówność (25) spełniają średnie $\bar{x}_{10}, \dots, \bar{x}_4$, zatem odmiany KM, KP, ŻB, WŁ, B, ŻP, KW są tak dobre lub lepsze jak odmiana KP.

7. Studentyzowany maksymalny moduł

Założmy, że zmienne losowe X_1, \dots, X_k są niezależne o rozkładzie normalnym ze średnimi μ_1, \dots, μ_k i jednakową wariancją σ^2 . Przypuśćmy, że dla każdej zmiennej losowej X_i mamy n_i obserwacji ($i = 1, \dots, k$). Przy pomocy testu studentyzowanego maksymalnego

modułu możemy utworzyć przedziały ufności dla średnich. Z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$

$$(27) \quad \mu_1 \in \bar{x}_1 \pm |m|_{k,\nu}^{\alpha} s_{\nu} \sqrt{1/n_1}, \quad i = 1, \dots, k,$$

gdzie $|m|_{k,\nu}^{\alpha}$ jest górnym $\alpha\%$ punktem rozkładu studentyzowanego maksymalnego modułu z parametrami k i ν . Przy pomocy testu studentyzowanego maksymalnego modułu możemy również utworzyć przedziały ufności dla kombinacji liniowych średnich. Z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$

$$(28) \quad \sum_{i=1}^k l_i \mu_i \in \sum_{i=1}^k l_i \bar{x}_i \pm |m|_{k,\nu} \cdot s_{\nu} \cdot \sum_{i=1}^k |l_i \sqrt{1/n_i}|.$$

Przedziały ufności (27) są szczególnym przypadkiem przedziałów (28). Na przykład przedział ufności dla różnicy średnich będzie następujący

$$\mu_1 - \mu_j \in \bar{x}_1 - \bar{x}_j \pm |m|_{k,\nu}^{\alpha} s_{\nu} (\sqrt{1/n_1} + \sqrt{1/n_j}).$$

7.1. Podsumowanie i uwagi

Przedziały ufności (27) studentyzowanego maksymalnego modułu są krótsze od odpowiednich przedziałów ufności testów Scheffégo i t - Bonferroniego. Testy Scheffégo i t - Bonferroniego są niedokładne dla pojedynczych średnich, ponieważ ich poziom ufności jest znacznie większy niż $1 - \alpha$.

Przedziały ufności (28) dla kombinacji liniowych średnich mogą być dłuższe od przedziałów Scheffégo i t - Bonferroniego. Dużą niedogodnością w stosowaniu testu studentyzowanego maksymalnego modułu jest ograniczoność tablic. W [11] znajdują się tablice wartości $|m|_{k,\nu}^{\alpha}$ tylko dla $k = 1/1/8$, $\nu = 5/5/20, 24, 30, 40, 60, 120, \infty$ i $\alpha = 0,05$. Tablice te zostały przepisane z [11] i umieszczone na końcu niniejszej pracy.

7.2. Przykład

Z braku wartości krytycznych $|m|_{k,\nu}^{\alpha}$ dla $k > 8$ znajdziemy przedziały ufności dla średnich

$$\bar{x}_1 = 14, \quad \bar{x}_2 = 15, \quad \bar{x}_3 = 19, \quad \bar{x}_4 = 20,$$

które są obliczone na podstawie $n = 9$ obserwacji oraz $s_{\nu}^2 = 18$, $\nu = 24$. Powyższe dane są zaczerpnięte z pracy [5]. Odczytujemy $|m|_{4;24}^{0,05} = 2,68$ oraz obliczamy

$$\bar{x}_1 \pm 2,68 \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 18} = \bar{x}_1 \pm 3,78.$$

Otrzymujemy następujące przedziały ufności

$$10,22 \leq \mu_1 \leq 17,78$$

$$11,22 \leq \mu_2 \leq 18,78$$

$$15,22 \leq \mu_3 \leq 22,78$$

$$16,22 \leq \mu_4 \leq 23,78$$

8. Najmniejsza istotna różnica

Test najmniejszej istotnej różnicy składa się z dwóch kroków. Pierwszy krok: sprawdzamy hipotezę ogólną

$$H: \mu_1 = \dots = \mu_k$$

przy pomocy testu F. Statystyka F dla tej hipotezy może być postaci

$$F = \frac{N-k}{k-1} \frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2}$$

gdzie $N = \sum_{i=1}^k n_i$. Wartość statystyki F porównujemy z wartością krytyczną $F_{k-1, N-k}(\alpha)$, gdzie $F_{\nu_1, \nu_2}(\alpha)$ oznacza $\alpha\%$ punkt rozkładu F z ν_1 i ν_2 stopniami swobody. Jeśli F obliczone jest mniejsze od $F_{k-1, N-k}(\alpha)$, to nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy ogólnej, że wszystkie średnie są jednakowe. W takim przypadku postępowanie kończymy na tym kroku. Jeśli F obliczone przewyższa $F_{k-1, N-k}(\alpha)$, to hipotezę ogólną odrzucamy i przechodzimy do następnego kroku. Drugi krok: testujemy hipotezę $H: \mu_i = \mu_j$ dla jakichkolwiek $i, j, i \neq j, i, j = 1, \dots, k$ przy pomocy testu t - Studenta. Statystykę t dla tej hipotezy

$$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{s_v \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}}$$

porównujemy z wartością krytyczną $t_v(\alpha/2)$. Jeśli $t > t_v(\alpha/2)$ to średnie \bar{x}_i i \bar{x}_j różnią się istotnie. W przeciwnym wypadku, gdy $t \leq t_v(\alpha/2)$ mówimy, że nie ma istotnej różnicy między tymi średnimi na poziomie istotności α . W kroku drugim możemy przy pomocy testu t porównać wszystkie $\binom{k}{2}$ pary średnich.

8.1. Podsumowanie i uwagi

Wielką zaletą testu najmniejszej istotnej różnicy jest jego prostota w rachunkach. W porównaniu z wielokrotnymi testami, test najmniejszej istotnej różnicy jest bardziej wszechstronny i stosowany do ogólniejszych problemów. Może się zdarzyć, że choć test F odrzuci hipotezę ogólną, to test t może nie wykryć żadnej istotnej różnicy między parami średnich. Będzie to wtedy, gdy punkt próby wpadnie na zewnątrz obszaru utworzonego z $\binom{k}{2}$ testów t (patrz rysunek 5).

Przy teście t musimy zwrócić uwagę na prawdopodobieństwo błędu. Dla ustalonego poziomu istotności pojedynczego porównania, wraz ze wzrostem liczby k średnich wzrasta bardzo szybko poziom istotności dla całego doświadczenia, czyli prawdopodobieństwo błędu. Tabela umieszczona w [5] pokazuje, jak szybko wzrasta poziom istotności dla doświadczenia, gdy poziom istotności pojedynczego porównania jest $\alpha = 5\%$, 1% , $0,1\%$, a $k = 2, 3, 5, 10, 20$.

8.2. Przykład

Porównajmy niektóre średnie z tabeli 4. Na przykład \bar{x}_{10} i \bar{x}_9 , \bar{x}_5 i \bar{x}_4 , \bar{x}_7 i \bar{x}_4 , \bar{x}_{10} i \bar{x}_5 . Otrzymamy:

$$\bar{x}_{10} - \bar{x}_9 = 0,1 < \sqrt{3,44 \cdot \frac{2}{6}} \cdot t_{45} (0,05/2) = 1,07 \cdot 2,021 = 2,16$$

$$\bar{x}_5 - \bar{x}_4 = 1,1 < 2,16$$

$$\bar{x}_7 - \bar{x}_4 = 2,6 > 2,16$$

$$\bar{x}_{10} - \bar{x}_5 = 2,4 > 2,16.$$

Test t wykazał, że nie ma istotnej różnicy między średnimi \bar{x}_{10} i \bar{x}_9 oraz \bar{x}_5 i \bar{x}_4 . Natomiast średnie \bar{x}_7 i \bar{x}_4 oraz \bar{x}_{10} i \bar{x}_5 różnią się istotnie. Porównując wyniki z testem Duncana widzimy, że test Duncana zaliczył średnie \bar{x}_{10} i \bar{x}_5 do jednej grupy, natomiast test t wykazał różnice między tymi średnimi. Ta rozbieżność wynika między innymi stąd, że poziom istotności testu Duncana dla porównania średnich \bar{x}_{10} z \bar{x}_5 wynosi $\alpha_6 = 1 - (1 - 0,05)^5$, który to poziom jest znacznie większy od $0,05$.

9. Streszczenie

W niniejszej pracy w § 3 - § 8 zostały omówione najczęściej stosowane testy: Scheffégo, t - Bonferroniego, Tukeya, Newmana - Keulsa, Duncana, zasada R, studentyzowany maksymalny moduł, najmniejsza istotna różnica. W § 2 rozważyliśmy prawdopodobieństwo błędu wymienionych testów. Podsumowując rozważania z § 2 - § 8 można wskazać, który test w danej sytuacji stosować.

Test Scheffégo (§ 3) i t - Bonferroniego (§ 4) najlepiej stosować dla badania kontrastów lub kombinacji liniowych zawierających więcej niż dwie średnie. Oba te testy można stosować przy bardzo ogólnych założeniach, gdy zmienne losowe są skorelowane. Musimy sobie zdać sprawę, że oba testy mają poziom istotności mniejszy od α (§ 2). W konkretnej sytuacji należy porównać wartości krytyczne testu Scheffégo i t - Bonferroniego i wybrać ten test, który ma mniejszą wartość krytyczną.

Test Tukeya i Newmana - Keulsa (§ 5.1 i § 5.2) mają poziom istotności dokładnie równy α i najlepiej je stosować do porównań par średnich. Przy pomocy tych testów możemy tworzyć grupy jednorodne. Można się zastanowić w jakiej sytuacji stosować test Tukeya, a w jakiej test Newmana - Keulsa. Przypuśćmy, że badamy dwie wcześniej dojrzewające i trzy późno dojrzewające odmiany pewnej rośliny. Ogólna hipoteza zerowa orzeka, że wszystkie odmiany mają jednakowy plon ($H: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$). Przypuśćmy, że hipoteza ta została odrzucona. Na podstawie wieloletnich doświadczeń przypuszcza się, że wcześniej dojrzewające odmiany różnią się w plonie od późno dojrzewających odmian. Możemy w tym przypadku porównywać ze sobą wcześniej dojrzewające odmiany oraz późno dojrzewające odmiany, czyli będziemy badać dwie hipotezy oddzielnie

$$H_1: \mu_1 = \mu_2, \quad H_2: \mu_3 = \mu_4 = \mu_5.$$

Zastosujemy w tym przypadku test Newmana - Keulsa. Test Tukeya badałby, czy części hipotezy $H: \mu_1 = \mu_2, \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ są równocześnie słuszne. Poziom istotności dla tej hipotezy jest równy α , ale dla części tej hipotezy jest mniejszy od α .

Zasadę R (§ 6) stosujemy do wyboru populacji niegorszych od populacji standardowej lub kontrolnej. Zasada R jest testem jednostronnym, więc stosujemy ją do wyboru populacji najlepszych.

Studentyzowany maksymalny moduł daje najkrótsze równoczesne przedziały ufności dla pojedynczych średnich.

Test Duncana (§ 5.3) i najmniejsza istotna różnica (§ 8) nie są godne polecenia ze względu na duże prawdopodobieństwo błędu. Test najmniejszej istotnej różnicy ze względu na prostotę rachunkową stosujemy jako sprawdzian i metodę towarzyszącą innym testom.

T a b l i c a I

Wartości krytyczne t ($\alpha/2k$) statystyki t Bonferroniego
 $\alpha = 0,05$

\sqrt{k}	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
5	3,17	3,54	3,81	4,04	4,22	4,38	4,53	4,66	4,78	5,25	5,60
7	2,84	3,13	3,34	3,50	3,64	3,76	3,86	3,95	4,03	4,36	4,59
10	2,64	2,87	3,04	3,17	3,28	3,37	3,45	3,52	3,58	3,83	4,01
12	2,56	2,78	2,94	3,06	3,15	3,24	3,31	3,37	3,43	3,65	3,80
15	2,49	2,69	2,84	2,95	3,04	3,11	3,18	3,24	3,29	3,48	3,62
20	2,42	2,61	2,75	2,85	2,93	3,00	3,06	3,11	3,16	3,33	3,46
24	2,39	2,58	2,70	2,80	2,88	2,94	3,00	3,05	3,09	3,26	3,38
30	2,36	2,54	2,66	2,75	2,83	2,89	2,94	2,99	3,03	3,19	3,30
40	2,33	2,50	2,62	2,71	2,78	2,84	2,89	2,93	2,97	3,12	3,23
60	2,30	2,47	2,58	2,66	2,73	2,79	2,84	2,88	2,92	3,06	3,16
120	2,27	2,43	2,54	2,62	2,68	2,74	2,79	2,83	2,86	2,99	3,09
∞	2,24	2,39	2,50	2,58	2,64	2,69	2,74	2,77	2,81	2,94	3,02

$\alpha = 0,01$

Tablica I (c. d.)

$\nu \backslash k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
5	4,78	5,25	5,60	5,89	6,15	6,36	6,56	6,70	6,86	7,51	8,00
7	4,03	4,36	4,59	4,78	4,95	5,09	5,21	5,31	5,40	5,79	6,08
10	3,58	3,83	4,01	4,15	4,27	4,37	4,45	4,53	4,59	4,86	5,06
12	3,43	3,65	3,80	3,93	4,04	4,13	4,20	4,26	4,32	4,56	4,73
15	3,29	3,48	3,62	3,74	3,82	3,90	3,97	4,02	4,07	4,29	4,42
20	3,16	3,33	3,46	3,55	3,63	3,70	3,76	3,80	3,85	4,03	4,15
24	3,09	3,26	3,38	3,47	3,54	3,61	3,66	3,70	3,74	3,91	4,04
30	3,03	3,19	3,30	3,39	3,46	3,52	3,57	3,61	3,65	3,80	3,90
40	2,97	3,12	3,23	3,31	3,38	3,43	3,48	3,51	3,55	3,70	3,79
60	2,92	3,06	3,16	3,24	3,30	3,34	3,39	3,42	3,46	3,59	3,69
120	2,86	2,99	3,09	3,16	3,22	3,27	3,31	3,34	3,37	3,50	3,58
∞	2,81	2,94	3,02	3,09	3,15	3,19	3,23	3,26	3,29	3,40	3,48

$\alpha = 0,05$

$\nu \backslash k$	25	30	35	40	45	50
5	5,89	6,15	6,36	6,56	6,70	6,86
7	4,78	4,95	5,09	5,21	5,31	5,40
10	4,15	4,27	4,37	4,45	4,53	4,59
12	3,93	4,04	4,13	4,20	4,26	4,32
15	3,74	3,82	3,90	3,97	4,02	4,07
20	3,55	3,63	3,70	3,76	3,80	3,85
24	3,47	3,54	3,61	3,66	3,70	3,74
30	3,39	3,46	3,52	3,57	3,61	3,65
40	3,31	3,38	3,43	3,48	3,51	3,55
60	3,24	3,30	3,34	3,39	3,42	3,46
120	3,16	3,22	3,27	3,31	3,34	3,37
∞	3,09	3,15	3,19	3,23	3,26	3,29

$\alpha = 0,01$

Tablica I (c. d.)

$\nu \backslash k$	25	30	35	40	45	50
5	8,37	8,68	8,95	9,19	9,41	9,68
7	6,30	6,49	6,67	6,83	6,93	7,06
10	5,20	5,33	5,44	5,22	5,60	5,70
12	4,86	4,95	5,04	5,12	5,20	5,27
15	4,53	4,61	4,71	4,78	4,84	4,90
20	4,25	4,33	4,39	4,46	4,52	4,56
24	4,1†	4,2†	4,3†	4,3†	4,3†	4,4†
30	3,98	4,13	4,26	4,1†	4,2†	4,2†
40	3,88	3,93	3,97	4,01	4,1†	4,1†
60	3,76	3,81	3,84	3,89	3,93	3,97
120	3,64	3,69	3,73	3,77	3,80	3,83
∞	3,54	3,59	3,63	3,66	3,69	3,72

† Otrzymane z interpolacji graficznej
Dane źródłowe są zaczerpnięte z [11], str. 238

T a b l i c a II

Wartości krytyczne $|m|_{k,\nu}^{\alpha}$ statystyki studentyzowanego
maksymalnego modułu

$\alpha = 0,05$

$\nu \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
5	2,57	3,09	3,40	3,62	3,78	3,92	4,04	4,14
10	2,23	2,61	2,83	2,98	3,10	3,19	3,28	3,35
15	2,13	2,47	2,67	2,81	2,91	2,99	3,06	3,12
20	2,09	2,41	2,59	2,72	2,82	2,90	2,97	3,02
24	2,06	2,38	2,56	2,68	2,78	2,84	2,91	2,96
30	2,04	2,35	2,52	2,64	2,73	2,80	2,86	2,91
40	2,02	2,32	2,49	2,60	2,69	2,76	2,82	2,86
60	2,00	2,29	2,46	2,56	2,65	2,72	2,77	2,82
120	1,98	2,26	2,43	2,53	2,61	2,68	2,73	2,77
∞	1,96	2,23	2,39	2,49	2,57	2,64	2,69	2,73

Dane źródłowe są zaczerpnięte z [11], str. 239.

T a b l i c a III

Górne wartości krytyczne wielowymiarowego rozkładu t $\alpha = 0,01$

$\frac{p}{v}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	3,36	3,90	4,21	4,43	4,60	4,73	4,85	4,94	5,03	5,11
6	3,14	3,61	3,88	4,06	4,21	4,32	4,42	4,51	4,58	4,64
7	3,00	3,42	3,66	3,83	3,96	4,06	4,15	4,22	4,29	4,35
8	2,90	3,29	3,51	3,66	3,78	3,88	3,96	4,03	4,09	4,14
9	2,82	3,19	3,40	3,54	3,66	3,75	3,82	3,89	3,94	3,99
10	2,76	3,11	3,31	3,45	3,56	3,64	3,72	3,78	3,83	3,88
11	2,72	3,06	3,25	3,38	3,48	3,56	3,63	3,69	3,74	3,79
12	2,68	3,01	3,19	3,32	3,42	3,50	3,56	3,62	3,67	3,71
13	2,65	2,97	3,15	3,27	3,37	3,44	3,51	3,56	3,61	3,65
14	2,62	2,93	3,11	3,23	3,32	3,40	3,46	3,51	3,56	3,60
15	2,60	2,91	3,08	3,20	3,29	3,36	3,42	3,47	3,52	3,56
16	2,58	2,88	3,05	3,17	3,26	3,33	3,39	3,44	3,48	3,52
17	2,57	2,86	3,03	3,14	3,23	3,30	3,36	3,41	3,45	3,49
18	2,55	2,84	3,01	3,12	3,20	3,27	3,33	3,38	3,42	3,46
19	2,54	2,83	2,99	3,10	3,18	3,25	3,31	3,36	3,40	3,44
20	2,53	2,81	2,97	3,08	3,16	3,23	3,29	3,34	3,38	3,41
21	2,52	2,80	2,96	3,07	3,15	3,21	3,27	3,32	3,36	3,39
22	2,51	2,79	2,94	3,05	3,13	3,20	3,25	3,30	3,34	3,38
23	2,50	2,77	2,93	3,04	3,12	3,18	3,24	3,28	3,32	3,36
24	2,49	2,77	2,92	3,02	3,11	3,17	3,22	3,27	3,31	3,34
25	2,48	2,76	2,91	3,01	3,10	3,16	3,21	3,26	3,30	3,33
26	2,48	2,75	2,90	3,00	3,08	3,15	3,20	3,24	3,29	3,32
27	2,47	2,74	2,89	2,99	3,07	3,14	3,19	3,23	3,27	3,31
28	2,47	2,73	2,88	2,99	3,06	3,13	3,18	3,22	3,26	3,30
29	2,46	2,73	2,88	2,98	3,06	3,12	3,17	3,21	3,25	3,29
30	2,46	2,72	2,87	2,97	3,05	3,11	3,16	3,20	3,24	3,28
31	2,45	2,72	2,86	2,96	3,04	3,10	3,15	3,20	3,23	3,27
32	2,45	2,71	2,86	2,96	3,03	3,10	3,15	3,19	3,23	3,26
33	2,44	2,71	2,85	2,95	3,03	3,09	3,14	3,18	3,22	3,25
34	2,44	2,70	2,85	2,95	3,02	3,08	3,13	3,17	3,21	3,25
35	2,44	2,70	2,84	2,94	3,01	3,08	3,13	3,17	3,21	3,24
40	2,42	2,68	2,82	2,92	2,99	3,05	3,10	3,14	3,18	3,21
60	2,39	2,64	2,78	2,87	2,94	3,00	3,04	3,08	3,12	3,14
120	2,36	2,60	2,73	2,82	2,89	2,94	2,99	3,03	3,06	3,09
∞	2,33	2,56	2,68	2,77	2,84	2,89	2,93	2,97	3,00	3,03

$\alpha = 0,05$

Tablica III (c. d.)

ν	p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5		2,01	2,44	2,68	2,85	2,98	3,08	3,16	3,24	3,30	3,36
6		1,94	2,34	2,56	2,71	2,83	2,92	3,00	3,06	3,12	3,17
7		1,89	2,27	2,48	2,62	2,73	2,81	2,89	2,95	3,00	3,05
8		1,86	2,22	2,42	2,55	2,66	2,74	2,81	2,87	2,92	2,96
9		1,83	2,18	2,37	2,50	2,60	2,68	2,75	2,81	2,86	2,90
10		1,81	2,15	2,34	2,47	2,56	2,64	2,70	2,76	2,81	2,85
11		1,79	2,13	2,31	2,43	2,53	2,60	2,67	2,72	2,77	2,81
12		1,78	2,11	2,29	2,41	2,50	2,58	2,64	2,69	2,73	2,77
13		1,77	2,09	2,27	2,39	2,48	2,55	2,61	2,66	2,71	2,75
14		1,76	2,08	2,25	2,37	2,46	2,53	2,59	2,64	2,69	2,72
15		1,75	2,07	2,24	2,36	2,44	2,51	2,57	2,62	2,67	2,71
16		1,75	2,06	2,23	2,34	2,43	2,50	2,56	2,61	2,65	2,69
17		1,74	2,05	2,22	2,33	2,42	2,49	2,54	2,59	2,63	2,67
18		1,73	2,04	2,21	2,32	2,41	2,48	2,53	2,58	2,62	2,66
19		1,73	2,03	2,20	2,31	2,40	2,46	2,52	2,57	2,61	2,65
20		1,72	2,03	2,19	2,30	2,39	2,46	2,51	2,56	2,60	2,64
21		1,72	2,02	2,18	2,30	2,38	2,45	2,50	2,55	2,59	2,63
22		1,72	2,02	2,18	2,29	2,37	2,44	2,50	2,54	2,58	2,62
23		1,71	2,01	2,17	2,28	2,37	2,43	2,49	2,53	2,57	2,61
24		1,71	2,01	2,17	2,28	2,36	2,43	2,48	2,53	2,57	2,60
25		1,71	2,00	2,16	2,27	2,36	2,42	2,48	2,52	2,56	2,60
26		1,71	2,00	2,16	2,27	2,35	2,42	2,47	2,52	2,56	2,59
27		1,70	2,00	2,16	2,26	2,35	2,41	2,46	2,51	2,55	2,58
28		1,70	1,99	2,15	2,26	2,34	2,41	2,46	2,51	2,54	2,58
29		1,70	1,99	2,15	2,26	2,34	2,40	2,46	2,50	2,54	2,57
30		1,70	1,99	2,15	2,25	2,33	2,40	2,45	2,50	2,54	2,57
31		1,70	1,99	2,14	2,25	2,33	2,39	2,45	2,49	2,53	2,57
32		1,69	1,98	2,14	2,25	2,33	2,39	2,44	2,49	2,53	2,56
33		1,69	1,98	2,14	2,24	2,32	2,39	2,44	2,49	2,52	2,56
34		1,69	1,98	2,14	2,24	2,32	2,38	2,44	2,48	2,52	2,56
35		1,69	1,98	2,13	2,24	2,32	2,38	2,43	2,48	2,52	2,55
40		1,68	1,97	2,13	2,23	2,31	2,37	2,42	2,47	2,51	2,54
60		1,67	1,95	2,10	2,21	2,28	2,35	2,39	2,44	2,48	2,50
120		1,66	1,93	2,08	2,18	2,26	2,32	2,37	2,41	2,45	2,48
∞		1,64	1,92	2,06	2,16	2,23	2,29	2,34	2,38	2,42	2,45

Dane źródłowe są zaczerpnięte z prac [10], str. 23, [2], str. 1117 i [7], str. 963.

Tablica IV
Tablica poprawek
C_α = 0,01

p	α																										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																
5	2,6	2,4	2,3	4,3	4,1	3,6	5,4	5,1	4,7	6,5	5,8	6,3	8,0	7,4	6,2	8,9	8,1	7,3	9,3	8,5	7,2	9,8	8,6	7,0			
6	1,9	1,8	1,7	3,3	3,1	3,1	4,7	4,6	4,4	5,5	5,1	4,3	6,2	5,9	5,6	7,0	6,3	6,1	7,3	6,8	6,0	7,9	7,3	6,5	8,4	7,8	7,1
7	1,7	1,9	1,7	3,0	2,9	2,5	3,9	3,8	3,1	4,8	4,7	3,8	5,4	5,3	5,2	6,0	5,8	5,1	6,6	6,3	5,7	7,0	6,5	5,6	7,4	6,7	6,2
8	1,5	1,6	0,9	2,8	2,7	2,6	3,8	3,6	4,1	4,5	4,2	4,0	4,9	4,8	4,6	5,3	5,0	4,5	5,7	5,6	5,2	6,1	5,9	5,1	6,8	6,4	5,8
9	1,6	1,7	0,9	2,6	2,7	2,6	3,4	3,4	3,4	3,8	3,6	3,3	4,3	4,3	4,0	5,0	4,9	4,7	5,1	5,1	4,6	5,8	5,7	5,1	6,0	6,0	5,3
10	1,6	1,7	1,9	2,4	2,4	2,7	3,2	3,1	3,5	3,6	3,7	3,4	4,1	4,4	4,1	4,6	4,3	4,0	4,8	4,6	4,0	5,2	5,2	4,7	5,4	5,5	4,6
11	1,3	1,3	1,0	2,2	2,0	1,8	3,0	2,8	2,7	3,4	3,4	3,4	3,9	4,1	4,2	4,4	4,4	4,1	4,6	4,7	4,1	5,1	5,0	4,8	5,0	4,9	4,7
12	1,2	1,3	1,0	2,2	2,1	1,9	2,7	2,8	2,7	3,2	3,1	3,5	3,7	3,4	3,4	4,2	4,1	4,2	4,4	4,4	4,1	4,6	4,7	4,1	5,1	5,0	4,8
13	1,0	1,3	1,0	1,9	2,1	1,9	2,7	2,8	2,7	3,0	3,2	2,7	3,5	3,9	3,5	3,7	3,8	3,4	4,2	4,1	4,2	4,4	4,4	4,2	4,7	4,7	4,9
14	1,4	1,4	2,0	1,9	2,1	1,9	2,5	2,9	2,8	3,0	3,2	3,6	3,2	3,5	3,5	3,8	3,5	3,5	3,7	3,8	4,3	4,0	4,2	4,4	4,4	4,2	
15	1,0	0,9	1,0	1,9	1,7	1,9	2,5	2,5	1,9	2,7	2,8	2,7	3,3	3,2	3,6	3,5	3,5	3,5	3,7	3,8	4,3	4,0	4,2	4,3	4,3	4,2	4,3
16	1,4	1,4	1,0	2,0	2,2	2,0	2,2	2,1	1,9	2,8	2,9	2,8	3,0	3,2	2,7	3,2	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	4,0	4,2	4,3	4,3	4,2	4,3
17	1,0	1,4	1,0	1,6	1,8	2,0	2,2	2,5	2,8	2,8	2,9	2,8	3,0	2,8	2,7	3,3	3,2	2,7	3,5	3,5	3,5	3,8	3,9	4,3	4,0	4,2	4,3
18	1,1	1,4	1,1	1,7	1,8	1,0	2,2	2,1	1,9	2,8	2,9	2,8	3,1	3,3	3,7	3,3	3,2	3,6	3,5	3,5	3,5	3,8	3,9	4,4	3,8	3,8	4,3
19	1,1	0,9	1,1	1,7	1,8	1,0	1,9	2,1	1,9	2,5	2,9	2,8	2,8	2,9	2,8	3,0	3,2	2,7	3,3	3,2	2,7	3,5	3,5	3,5	3,5	3,9	3,5
20	1,1	0,9	1,1	1,7	1,8	2,0	1,9	2,2	1,9	2,5	2,5	2,8	2,8	2,9	2,8	2,7	2,8	2,7	3,0	3,2	2,7	3,2	3,5	3,5	3,8	3,9	4,4
21	1,1	0,9	1,1	1,3	1,3	1,0	1,9	2,2	1,9	2,2	2,5	1,9	2,8	2,9	2,8	3,0	3,2	2,7	3,3	3,2	2,7	3,2	3,5	3,5	3,8	3,9	4,4
22	0,7	1,0	1,1	1,7	1,8	2,0	2,0	2,2	2,0	2,2	2,6	2,9	2,5	2,5	2,8	2,8	3,3	3,7	3,0	3,2	2,7	3,3	3,6	3,6	3,2	3,5	3,5
23	1,1	1,4	1,1	1,4	1,8	2,0	2,0	2,2	2,0	2,2	2,1	1,9	2,8	2,9	2,8	2,8	2,9	2,8	3,0	3,2	2,7	3,2	3,6	3,6	3,3	3,6	3,6
24	0,7	1,0	0,0	1,4	1,4	2,0	2,0	2,2	3,0	1,9	2,1	1,9	2,5	2,5	2,8	2,8	3,3	3,7	2,7	3,3	2,7	3,0	3,2	3,6	3,3	3,6	3,6
25	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	2,1	2,0	2,2	2,0	1,9	2,1	1,9	2,5	2,5	1,9	2,8	2,9	2,8	2,8	2,9	2,8	3,0	3,2	2,7	3,3	3,6	3,6
26	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	2,1	2,0	2,2	2,0	2,3	2,6	2,9	2,2	2,5	1,9	2,8	2,9	2,8	3,1	3,3	3,7	2,7	2,8	2,7	3,0	3,2	2,7
27	1,1	1,0	1,1	1,4	1,8	2,1	2,0	2,2	2,0	2,3	2,6	2,9	2,2	2,5	1,9	2,5	2,9	2,8	2,8	3,3	3,7	3,1	3,3	3,7	3,0	3,2	2,7
28	1,1	1,0	1,1	1,7	1,8	2,1	1,7	1,8	2,0	2,3	2,6	2,9	2,2	2,6	1,9	2,5	2,5	2,8	2,8	3,3	3,7	3,1	3,3	3,7	3,0	3,2	2,7
29	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	1,0	1,7	1,8	2,0	2,0	2,2	2,0	2,2	2,6	1,9	2,5	2,5	2,8	2,8	3,3	3,7	3,1	3,3	3,7	3,0	3,2	2,7
30	1,1	1,0	1,1	1,4	1,4	2,1	1,7	1,8	2,0	2,0	2,2	2,0	2,2	2,6	2,9	2,5	2,5	2,8	2,8	3,3	3,7	3,1	3,3	3,7	2,7	3,2	2,7
31	0,7	1,0	0,0	1,4	1,9	2,1	2,0	2,2	2,0	2,0	2,2	2,0	2,3	2,6	2,9	2,5	3,0	2,9	2,5	2,9	2,8	3,1	3,3	3,7	2,7	3,3	3,7
32	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	1,0	1,7	1,8	2,0	2,3	2,6	3,0	1,9	2,1	1,9	2,2	2,5	1,9	2,5	2,9	2,8	2,6	2,9	2,8	3,1	3,3	3,7
33	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	2,1	1,7	1,8	2,0	2,0	2,2	2,0	2,3	2,6	2,9	2,2	2,5	1,9	2,8	2,9	2,8	2,8	2,9	2,8	3,1	3,3	3,7
34	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	1,0	1,4	1,8	1,0	2,0	2,2	2,0	2,3	2,6	2,9	2,6	2,6	2,9	2,8	2,9	2,8	2,8	3,3	3,7	2,8	2,9	2,8
35	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	2,1	1,7	1,8	2,0	2,3	2,2	3,0	1,9	2,2	1,9	2,5	2,5	2,8	2,8	3,3	3,7	2,5	2,5	2,9	2,8	2,9	2,8
40	0,7	1,0	1,1	1,4	1,4	2,1	1,7	1,8	2,0	2,0	2,2	3,0	2,0	2,2	3,0	2,3	2,6	2,9	2,5	2,5	2,9	2,5	2,5	2,9	2,8	2,9	2,8
60	0,8	1,0	1,1	1,1	1,0	1,1	1,4	1,9	2,1	2,0	1,8	3,1	1,7	2,2	2,0	2,3	2,6	3,0	2,6	2,6	2,9	2,6	2,6	2,9	2,9	3,4	4,8
120	0,8	0,5	1,1	1,1	1,5	2,2	1,4	1,4	2,1	1,7	1,8	2,1	1,7	1,8	2,1	1,7	2,2	2,0	2,0	2,2	2,0	2,3	2,6	2,9	2,5	2,6	2,9
∞	0,8	0,5	1,2	1,1	1,5	2,2	1,1	1,4	2,2	1,4	1,4	2,1	1,7	2,3	3,1	1,7	2,2	2,0	2,0	2,2	2,0	2,0	2,2	3,0	2,0	2,2	3,0

Tablica IV e. d.

p	2		3		4		5		6		7		8		9		10										
	$\frac{\min p_i}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{5}{n}$	$\frac{6}{n}$	$\frac{7}{n}$	$\frac{8}{n}$	$\frac{9}{n}$	$\frac{10}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{5}{n}$	$\frac{6}{n}$	$\frac{7}{n}$									
5	3,7	3,8	3,7	6,0	5,5	4,5	7,4	7,0	6,3	8,4	7,6	6,0	9,7	8,7	7,8	10,8	9,7	8,5	11,1	9,9	8,3	11,8	10,5	9,4	12,2	10,7	8,9
6	3,4	2,8	2,6	5,5	5,2	4,7	6,6	6,4	5,5	7,8	7,1	6,4	8,6	8,2	7,2	9,3	8,4	7,0	10,1	9,6	8,8	10,6	9,8	8,6	11,4	10,1	9,5
7	3,1	2,9	2,6	4,8	4,3	3,6	6,1	5,6	4,6	7,0	6,8	5,5	8,2	7,6	7,5	8,6	7,8	7,3	9,1	8,6	7,1	10,0	9,3	8,0	10,2	9,6	7,9
8	2,7	3,0	2,7	4,5	4,4	3,7	5,9	5,7	5,9	6,8	6,0	5,6	7,7	7,3	6,6	8,2	7,6	6,4	8,7	7,9	7,3	9,2	8,7	7,2	9,8	9,0	8,1
9	2,7	3,1	2,7	4,6	4,5	3,8	5,6	5,4	5,8	7,1	7,0	6,7	7,4	7,4	6,7	8,2	7,6	6,4	8,4	7,9	6,3	9,0	8,3	7,2	9,8	9,0	8,1
10	2,8	2,5	2,9	4,3	4,0	3,8	5,3	4,9	3,6	6,2	6,2	5,9	6,8	6,6	5,7	7,4	7,4	6,7	7,6	7,2	6,5	8,2	7,6	6,4	8,8	7,9	7,4
11	2,3	2,5	1,4	4,3	4,0	3,9	5,3	5,5	4,9	5,9	5,8	4,7	6,5	6,7	5,8	7,1	6,5	5,6	7,7	7,3	6,6	7,9	7,2	6,5	8,2	7,6	6,4
12	2,4	2,5	1,4	3,9	3,5	3,9	5,0	5,0	4,8	6,2	6,2	4,6	6,8	6,6	5,7	7,4	6,9	6,7	7,4	6,9	6,7	7,7	7,8	7,7	8,3	8,2	7,6
13	2,9	2,5	2,9	4,0	3,5	4,0	5,0	4,5	3,8	5,6	5,4	4,8	6,3	6,3	5,9	6,9	6,6	5,7	7,1	7,0	6,8	7,4	6,9	6,6	7,6	7,3	6,5
14	2,4	2,6	1,4	4,0	4,1	4,0	4,6	4,5	3,8	5,3	5,4	4,9	5,9	5,8	5,9	6,6	6,2	5,8	6,8	6,6	6,8	7,1	6,9	5,6	7,7	7,3	6,6
15	2,4	2,6	1,4	3,6	3,6	2,7	4,7	4,5	3,8	5,3	5,5	4,9	6,0	5,8	6,0	6,2	5,8	6,9	6,6	6,9	7,1	6,5	5,6	7,4	6,9	5,5	
16	2,4	1,9	1,5	3,6	3,6	2,7	4,7	4,6	3,8	5,3	4,9	4,9	5,6	5,9	4,8	6,2	5,7	4,7	6,5	6,1	5,7	6,8	6,5	6,8	7,1	6,9	5,6
17	2,4	2,6	1,5	3,6	3,6	2,7	4,7	4,6	3,9	5,0	5,0	5,0	5,6	5,4	4,8	6,3	6,3	5,9	6,6	6,7	5,8	6,8	7,1	6,8	7,1	7,0	6,7
18	2,4	2,6	2,9	3,6	3,6	2,7	4,3	4,6	3,9	5,0	5,0	3,7	5,2	5,4	4,8	5,9	5,8	5,9	6,2	6,2	5,8	6,9	6,6	6,9	6,8	7,0	6,8
19	2,5	2,6	3,0	3,6	3,6	2,7	4,3	4,6	3,9	5,0	5,0	3,7	5,7	5,0	6,1	5,9	5,8	5,9	6,2	6,2	5,8	6,5	6,6	5,7	6,8	6,5	5,7
20	2,5	2,0	1,5	3,6	3,6	4,1	4,3	4,6	3,9	5,0	5,0	3,8	5,3	4,9	4,9	6,0	5,8	6,0	6,2	6,2	5,9	6,5	6,7	5,8	6,4	6,6	5,7
21	2,5	2,6	3,0	3,7	3,7	2,7	4,4	4,1	3,9	4,1	3,9	5,1	5,1	5,1	5,1	6,0	5,9	6,0	6,3	6,3	5,9	6,6	6,2	5,8	6,5	6,6	5,7
22	2,0	2,0	1,5	3,7	3,7	2,7	4,4	4,4	3,9	5,1	5,1	5,1	5,3	5,5	4,9	5,6	5,3	4,8	6,3	6,3	5,9	6,6	6,7	5,8	6,5	6,6	5,7
23	2,5	2,6	3,0	3,7	3,7	4,1	4,4	4,7	3,9	4,6	4,5	3,8	5,3	5,5	4,9	5,6	5,4	4,8	6,3	6,3	5,9	6,6	6,7	5,8	6,5	6,6	5,7
24	2,0	2,0	1,5	3,2	3,1	2,8	3,9	4,1	3,9	4,7	5,1	5,1	4,9	4,9	4,9	5,6	5,4	4,8	5,9	5,8	4,7	6,2	6,2	5,8	6,5	6,7	6,9
25	2,5	2,0	3,0	3,7	3,7	4,2	4,4	4,1	4,0	4,7	4,5	3,8	5,4	5,5	5,0	5,2	5,4	4,8	5,9	5,8	5,9	6,2	6,2	5,9	6,1	6,1	5,8
26	2,5	2,0	1,5	3,2	3,1	2,8	4,0	4,1	4,0	4,7	4,5	3,8	5,0	5,0	3,7	5,3	5,4	4,9	5,6	5,8	4,8	5,9	5,7	4,7	6,2	6,2	5,8
27	2,0	2,0	1,5	3,2	3,1	2,8	4,4	4,1	5,3	4,7	4,5	3,8	5,0	5,0	5,0	5,3	5,4	6,1	5,6	5,8	6,0	5,9	6,3	5,9	6,6	6,7	7,0
28	2,5	2,0	3,0	3,3	3,7	4,2	4,0	4,1	4,0	4,7	4,6	5,1	5,0	5,0	3,7	5,3	5,4	4,9	5,6	5,3	4,8	6,3	6,3	5,9	6,2	6,2	5,8
29	2,5	2,0	1,5	3,3	3,1	2,8	4,0	4,1	4,0	4,3	4,6	3,8	5,0	5,0	5,0	5,3	4,9	4,9	5,6	5,9	6,0	5,9	5,8	5,9	6,2	6,7	7,0
30	2,0	2,0	1,5	3,3	3,1	2,8	4,0	4,1	4,0	4,7	4,6	5,1	5,0	5,0	5,0	5,3	5,4	4,9	5,6	5,3	4,8	5,9	5,8	4,7	6,2	6,2	5,8
31	2,0	2,0	1,5	3,3	3,7	4,2	4,0	4,1	4,0	4,7	4,6	3,9	5,0	5,6	5,0	5,3	5,4	4,9	5,6	5,9	6,0	5,9	5,8	5,9	5,8	6,2	5,8
32	2,5	2,7	3,0	3,3	3,1	2,8	4,0	4,1	4,0	4,3	4,6	3,9	5,0	5,0	5,0	5,3	5,5	6,1	5,6	5,3	4,8	5,9	5,8	4,7	6,2	6,2	5,9
33	2,5	2,0	1,5	3,3	3,1	2,8	4,0	4,2	4,0	4,7	4,6	5,2	5,0	5,0	5,0	5,3	5,5	4,9	5,2	5,4	4,8	6,0	6,3	5,9	5,9	6,2	5,9
34	2,0	2,0	1,5	3,3	3,1	2,8	4,0	4,2	4,0	4,3	4,6	3,9	5,0	5,0	5,0	4,9	4,9	4,9	5,6	5,9	6,0	5,9	5,8	5,9	5,9	5,7	4,7
35	2,0	2,0	1,5	3,3	3,1	2,8	4,0	4,2	4,0	4,3	4,6	3,9	5,0	5,0	5,0	5,3	5,5	6,2	5,2	5,4	4,8	5,6	5,8	4,8	6,3	6,3	5,9
40	2,0	2,0	3,1	3,3	3,8	4,3	3,6	3,6	4,1	4,4	4,7	3,9	4,2	4,5	3,8	5,0	5,0	6,3	4,9	4,9	4,9	5,2	5,4	4,8	6,0	6,4	6,0
60	2,1	2,0	3,1	2,9	3,2	2,9	3,7	4,3	4,1	4,0	4,1	4,0	4,3	4,6	5,2	4,6	4,5	5,1	5,0	5,0	5,0	4,9	5,4	4,9	5,2	5,9	4,8
∞	1,6	2,6	1,6	2,9	3,2	2,9	3,2	3,7	4,2	4,0	4,2	4,0	3,9	4,7	5,2	4,3	4,6	5,1	4,6	5,0	5,0	4,5	5,0	5,0	4,9	5,4	4,9

Literatura cytowana

- [1] Caliński, T., Model analizy wariancji dla doświadczeń wielokrotnych, Roczniki Nauk Rolniczych, t. 93-A-3, str. 549-579.
- [2] Dunnett, C. W., A multiple comparison procedure for comparing several treatments with a control, J. Amer. Statist. Assos. 50 (1955), str. 1096-1121.
- [3] Dunnett, C. W., New tables for multiple comparison with a control, Biometrics 20 (1964), str. 482-491.
- [4] Elandt, R., Statystyka matematyczna w zastosowaniu do doświadczalnictwa rolniczego, Warszawa 1964.
- [5] Enderlein, G., Signifikanztests in der Varianzanalyse, Tagungsberichte 68.
- [6] Gupta, S. S., On some multiple decision (selection and ranking) rules, Technometrics 7 (1965), str. 225-245.
- [7] Gupta, S. S., Sobel, M., On statistics which arises in selection and ranking problems, Ann. Math. Statist. 28 (1957), str. 957-967.
- [8] Kramer, C. Y., Extension of multiple range tests to group means with unequal numbers of replications, Biometrics 12 (1956), str. 307-310.
- [9] Kramer, C. Y., Extension of multiple range tests to group correlated adjusted means, Biometrics 13 (1957), str. 13-18.
- [10] Krishnaiah, P. R., Percentage points of the multivariate t distribution, Aerospace Research Laboratories Ohio, 500 (1965), str. 65-199.
- [11] Miller, R. G., Simultaneous Statistical Inference, New York 1966.
- [12] Oktaba, W., Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa, Warszawa 1966.
- [13] Oktaba, W., Metody statystyki w doświadczalnictwie, Warszawa 1971.
- [14] Scheffé, H., The Analysis of Variance, New York 1959.
- [15] Sitek, M., Application of the selection procedure R to unequal observation numbers, Zastosowania Matematyki, zeszyt 4, tom 12 (w druku).